УДК 621.311

Е.С.ЩЕРБИНА, М.А.МЕЛЬНИКОВ

ОСОБЕННОСТИ И ФОРМИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ КОШИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КЛАПАНА ГАЗОВЫХ ГОРЕЛОЧНЫХ БЛОКОВ

2.ПОТЕРЯ МАССЫ

Введение и постановка задачи

Настоящая работа завершает цикл статей [1-4] и является продолжением работы [4].

Ниже рассматривается временной цикл $t_3 \le t < t_4$ [4], в котором потеря массы m_3 при отрыве золотника 3 массы m_3 сопровождается увеличением числа степеней свободы системы “якорь 1-ползун 2“ массы ($m_1 + m_2$) [1, рис 1]. Реализуемость этой фазы движения обеспечивается при выполнении условия

$$\left| \vec{P}_T + \overline{P}_3 \right| > 0 . \tag{1}$$

Сформулируем задачу Коши для четвёртой фазы движения системы $\mathfrak{M}$.

В момент времени $t=t_3$ система $\mathfrak{M}_1$, включающая в себя “якорь 1- ползун 2-золотник 3“ теряет массу m_3 золотника 3. Далее подсистема “якорь 1- ползун 2“ и золотник 3 движутся как два абсолютно твёрдых тела, причём золотник 3 совершает сложное движение. В момент времени $t=t_4$ золотник 3 мгновенно присоединяется к подсистеме “якорь 1- ползун 2“. Этот момент времени $t=t_4$ является временем окончания четвёртой фазы движения системы $\mathfrak{M}$.

В качестве обобщенных координат и скоростей выбираются:

$$\begin{aligned} &q_1 = x_4, \\ &\dot{q}_1 = \vartheta_{e4} = \dot{x}_4, \\ &q_2 = \dot{x}_{r4}, \\ &\dot{q}_2 = \vartheta_{r4} = \dot{x}_{r4}, \\ &q_3 = q_4, \\ &\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = I_4. \end{aligned} \tag{2}$$

В представлении (2) вектор-функция ϑ_{e4} определяет скорость переносного поступательного движения системы “якорь 1- ползун 2“ относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$, а вектор-функция ϑ_{r4} – скорость относительного поступательного движения золотника 3 относительно системы “якорь 1- ползун 2“. Ясно, что абсолютным движением золотника 3 относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ будет поступательное движение со скоростью

$$\vec{V}_{a4} = \vec{V}_{r4} + \vec{V}_{e4} .$$

где $\vec{V}_{a4}$ –абсолютная скорость золотника 3 .

Задача Коши для четвёртой фазы движения системы $\mathfrak{M}$ имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_4 + c_6(h_3 - h_1 + x_4) = \frac{1}{2}\frac{dL}{dx_4} I_4 - (m_1 + m_2) g, \\ &m_3 \ddot{x}_{r4} = -\frac{\partial \Phi_м}{\partial x_{r4}} - m_3 g, \\ &L(x_4)\dot{I}_4 + R I_4 = e_4 - \frac{\partial L}{\partial x_4} I_4 \dot{x}_4, \end{aligned} \tag{3}$$

$$t=t_3: \quad \begin{aligned} & x_4(t_3)=h_3, \\ & x_{r4}(t_3)=0, \\ & \dot{x}_4(t_3)=\vartheta_3, \\ & \dot{x}_{r4}(t_3)=\dot{x}_{r4}=\vartheta_{r0}, \\ & I_4(t_3)=I_{40}=I_3, \end{aligned} \tag{4}$$

$$t=t_4: \quad \begin{aligned} & x_4(t_4)=h_4, \\ & x_{r4}(t_4)=\ell, \\ & \dot{x}_4(t_4)=\vartheta_4, \\ & \dot{x}_{r4}(t_4)=\vartheta_{r4}=0, \\ & I_4(t_4)=I_4. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ℓ - расстояние между якорем 1 и золотником 3 в момент отрыва золотника 3 от связи, h_3 и h_4 – конструктивные параметры. Все принятые в (3) обозначения соответствуют введенным в [1-4].

Основная задача ниже заключается в обосновании и формировании граничных условий для задачи Коши (3)-(5) .

1 Формирование начальных условий задачи Коши

Эффект мгновенной потери массы m_3 системой $\mathfrak{M}$ учитывается через возмущение начальными условиями этой системы в момент времени $t=t_3$. Ниже также работают ограничения 1-3 [4] с точностью до потери массы m_3 в четвёртой фазе движения системы $\mathfrak{M}$ во временном интервале

$$t_3-\varepsilon \leq t \leq t_3+\varepsilon , \tag{6}$$

где ε – бесконечно малая величина.

Для временного интервала (6) закон сохранения количества движения системы $\mathfrak{M}$ представим в виде:

$$Q_{x_4}^{t_3-\varepsilon}=Q_{x_4}^{t_3+\varepsilon} . \tag{7}$$

Имеем

$$Q_{x_4}^{t_3-\varepsilon}=(m_1+m_2+m_3)\vartheta_3 . \tag{8}$$

$$Q_{x_4}^{t_3+\varepsilon}=(m_1+m_2)\dot{x}_{40} . \tag{9}$$

Тогда закон сохранения (7) на основании выражений (8) и (9) записывается в следующей форме:

$$(m_1+m_2+m)\vartheta_3=(m_1+m_2)\dot{x}_{40} . \tag{10}$$

Из (10) следует:

$$\dot{x}_{40}=\frac{(m_1+m_2+m_3)}{(m_1+m_2)}\vartheta_3 , \tag{11}$$

где

$$k^{[4]}=\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}>1 \tag{12}$$

и это есть коэффициент передачи по скорости в момент отрыва массы m_3 от массы $(m_1+m_2+m_3)$.

Окончательно формула (11) записывается в виде:

$$\dot{x}_{40}=k^{[4]}\vartheta_3 , \tag{13}$$

где ϑ_3 определяется терминальными условиями третьей фазы движения системы $\mathfrak{M}$.

Определим начальные условия движения золотника 3 в его относительном движении относительно системы “якорь 1- ползун 2”. Работу совершают сила веса $\vec{P}_3$ золотника 3 и сила упругости F_{y5} элемента 5, являющиеся консервативными. Закон сохранения механической энергии записывается в виде:

$$\text{Т}_{r3}+\Pi_{r3}=\text{Т}_{r4}+\Pi_{r4} , \tag{14}$$

где T_{r3} , T_{r4} –кинетическая энергия золотника 3 в начальный t_3 и конечный t_4 момент времени; Π_{r3} , Π_{r4} – потенциальная энергия в эти же моменты времени.

В развёрнутом виде закон сохранения (14) имеет следующее аналитическое представление:

$$\frac{1}{2}m_3\vartheta_{r0}^2 - \frac{1}{2}c_5(\ell_5 - h_3 + h_1) = m_3 g\ell . \quad (15)$$

Из аналитического представления (15) следует

$$\vartheta_{r0}^2 = 2g\ell + \frac{c_5(\ell_5 - h_3 + h_1)}{m_3} . \quad (16)$$

Окончательно имеем:

$$\dot{x}_{r4} = \vartheta_{r0} = \left[2g\ell + \frac{c_5(\ell_5 - h_3 + h_1)}{m_3}\right]^{\frac{1}{2}} . \quad (17)$$

Определим начальные условия по току I_4. В положении равновесия, соответствующего начальным условиям в задаче Коши (3)- (5), имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{\beta}{(\alpha - h_3)^2}I_{40}^2 - c_6(h_3 - h_1) - (m_1 + m_2)g = 0 \quad (18)$$

Из выражения (18) получаем:

$$I_{40}^2 = (\alpha - h_3)\left\{\frac{2\left[(m_1 + m_2)g + c_6(h_3 - h_1)\right]}{\beta}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Из (19) следует, что система функционирует при $I_4 \geq I_{40}$.

Рассмотрим первичные оценки энергетических затрат механической части системы $\mathfrak{M}$ в фазе потери массы $\mathfrak{m}_3$ золотника. Оценим кинетическую энергию системы во временном интервале (6).Алгоритм определения оценки такой же, как и в [4].

Изменение кинетической энергии системы в фазе потери массы $\mathfrak{m}_3$ во временном интервале (6) имеет вид:

$$\Delta T_{M[4]} = T_{M[4]}^{t_3-\varepsilon} - T_{M[4]}^{t_3+\varepsilon} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\vartheta_3^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_{40}^2 . \quad (20)$$

На основании выражений (11)-(13) аналитическое представление (20) после преобразований записывается в виде:

$$\Delta T_{M[4]} = \frac{1 - k^{[4]}}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\vartheta_3^2 = (1 - k^{[4]})T_{M[3]}^{t_3-\varepsilon} , \quad (21)$$

где

$$T_{M[3]}^{t_3-\varepsilon} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\vartheta_3^2 .$$

Окончательно имеем:

$$T_{M[4]}^{t_3-\varepsilon} = T_{M[4]}^{t_3+\varepsilon} + (1 - k^{[4]})T_{M[3]}^{t_3-\varepsilon} . \quad (22)$$

Из анализа аналитических представлений (12), (19) и (22) следует: кинетическая энергия системы “якорь 1- ползун 2“ увеличивается за счёт отрыва золотника 3, т.е. мощности электромагнитной цепи достаточно для продолжения процесса движения системы $\mathfrak{M}$.

Таким образом, начальные условия для системы $\mathfrak{M}$ в четвёртой фазе движения представимы в виде:

$$t = t_3: \quad \begin{aligned} & x_{40}(t_3) = h_3, \\ & \dot{x}_{40}(t_3) = k^{[4]}\vartheta_3 \\ & x_{r4}(t_3) = 0, \\ & \dot{x}_{r4}(t_3) = \vartheta_{r0} = \left[2g\ell + \frac{c_5(\ell_5 - h_3 + h_1)}{m_3}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ & I_{40}(t_3) = (\alpha - h_3)\left\{\frac{2\left[(m_1+m_2)g + c_6(h_3 - h_1)\right]}{\beta}\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{23}$$

2 Формирование терминальных условий задачи Коши

Ниже ставится задача определения терминальных условий (5) задачи Коши (3)-(5).

На основании интегральной теоремы об изменении кинетической энергии имеем:

$$T_{M4} - T_{M3} = A^{(e)}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) + A^{(e)}(\vec{F}_{y6}) + A^{(e)}(\vec{P}_T) + A^{(i)}(\overrightarrow{R^{(i)}}), \tag{24}$$

где T_{M3}, T_{M4} - кинетическая энергия системы $\mathfrak{M}$ в моменты времени t_3 и t_4 соответственно;

$A^{(e)}(\bullet)$ - работы сил тяжести, упругости и тягового усилия электромагнита за тот же промежуток времени $[t_3, t_4]$;

$A^{(i)}(\bullet)$-работа всех внутренних сил, действующих на систему, а т.к. главный вектор всех внутренних сил $\vec{R}^{(i)} = 0$, то $A^{(i)}(\bullet) = 0$.

После вычисления левой и правой частей (24) получаем:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vartheta_4^2 - \frac{1}{2}k^{[4]^2}(m_1+m_2)\vartheta_3^2 = \frac{1}{2}\frac{\beta I_4^2}{\alpha + h_3 - h_4} - \frac{c_6(h_4-h_3)^2}{2} - (m_1+m_2)g(h_4-h_3). \tag{25}$$

Окончательно имеем:

$$\vartheta_4 = \left[\dot{x}_{40}^2 + \frac{\beta I_4^2}{m_1+m_2}(\alpha + h_3 - h_4)^{-1} - \omega_{o6}^{[4]^2}(h_4-h_3)^2 - 2g(h_4-h_3)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

где $\omega_{o6}^{[4]^2} = \sqrt{\dfrac{c_6}{m_1+m_2}}$.

Определим терминальные условия по току I_4 системы $\mathfrak{M}$ в задаче Коши (3)-(5).

Из анализа физической модели движения системы $\mathfrak{M}$ в четвёртой фазе следует, что работа электромагнитной силы P_{T4}, определяемой формулой

$$A^{(e)}(\vec{P}_{T4}) = \frac{1}{2}\beta I_4^2(\alpha + h_3 - h_4)^{-1}, \tag{27}$$

расходуется на преодоление силы тяжести системы "якорь 1 –ползун 2" и силы упругости $\vec{F}_{y6}$ упругого элемента 6. Тогда должно выполняться условие:

$$P_{T4}^{\max} \geq (P_1 + P_2) + F_{y6}. \tag{28}$$

В развёрнутой форме аналитическое представление (28) записывается в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{\beta I_4^2}{(\alpha + h_3 - h_4)^2} \geq (m_1+m_2)g + c_6(h_4-h_3). \tag{29}$$

Из выражения (29) окончательно имеем:

$$I_4 \geq (\alpha + h_3 - h_4)\left\{\frac{2(m_1+m_2)\left[g + \omega_{o6}^{[4]^2}(h_4-h_3)\right]}{\beta}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Определим в терминальных условиях (5) время $t = t_4$ окончания четвёртой фазы движения $\mathfrak{M}$. Для этого воспользуемся аналитическими представлениями (26) и (30) при $t \in [t_3, t_4]$ и $x \in [h_3, h_4]$. После преобразований получаем:

$$\vartheta_4 = \left[\dot{x}_{40}^2 + 2\alpha g + 2(\alpha\omega_{o6}^{[4]^2} - 2g)x_4 - 3\omega_{o6}^{[4]^2} x_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Введём следующие обозначения:

$$c_4 = \dot{x}_{40}^2 + 2\alpha g,$$
$$2b_4 = 2(\alpha\omega_{o6}^{[4]^2} - 2g), \quad 32)$$
$$a_4 = \sqrt{3}\omega_{o6}^{[4]}.$$

С учётом введенных обозначений (32) выражение (31) записывается в виде:

$$\vartheta_4 = \left[c_4 + 2b_4 x_4 - a_4{}^2 x_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Из выражения (33) имеем:

$$dt = \left(c_4 + 2b_4 x_4 - a_4{}^2 x_4^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx_4. \quad (34)$$

Проинтегрировав левую и правую части (34), получаем

$$t_4 = t_3 + \int_{h_3}^{h_4} \left(c_4 + 2b_4 x_4 - a_4{}^2 x_4^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx_4. \quad (35)$$

Введём обозначение:

$$A_{[4]} = \int_{h_3}^{h_4} \left(c_4 + 2b_4 x_4 - a_4{}^2 x_4^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx_4. \quad (36)$$

Тогда (35) записывается в виде:

$$t_4 \underset{(36)}{\overset{def}{=}} t_3 + A_{[4]}. \quad (37)$$

На основании (37) окончательно имеем:

$$t_4 = t_3 + \sum_{\nu=2}^{4} A_{[\nu]}. \quad (40)$$

Таким образом, терминальные условия (5) для системы $\mathfrak{M}$ в четвёртой фазе движения представимы в виде:

$$t = t_4: \quad \begin{aligned} & x_4(t_4) = h_4, \\ & \dot{x}_4(t_4) = \left[\dot{x}_{40}^2 + \frac{\beta I_4^2}{m_1 + m_2}(\alpha + h_3 - h_4)^{-1} - \omega_{o6}^{[4]^2}(h_4 - h_3)^2 - 2g(h_4 - h_3) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ & x_{r4}(t_4) = \ell, \\ & \dot{x}_{r4}(t_4) = 0, \\ & I_4(t_4) = (\alpha + h_3 - h_4)\left\{ \frac{2(m_1 + m_2)\left[g + \omega_{o6}^{[4]^2}(h_4 - h_3) \right]}{\beta} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Замечания

1. При определении критериальных оценок от эффекта присоединения и потери масс системы $\mathfrak{M}$, а также для формирования гладкого управления электромагнитной системой необходимо проводить согласование и коррекцию граничных условий задачи Коши в третьей и четвёртой фазах движения системы $\mathfrak{M}$.
2. При построении моделей движения не учитывались обобщённые силы от взаимодействия газовой среды и механической части системы $\mathfrak{M}$. Экспериментальные данные показали, что при заданных массах влияние газовой среды на систему незначительно и может не учитываться при проектировании ЭМК. Но если массы достаточно малы, то необходимо учитывать взаимодействие газовой среды и механической части системы $\mathfrak{M}$. В этом случае систему $\mathfrak{M}$ следует рассматривать как систему с переменной массой во временном интервале

$\left[t_3, t_4\right]$. Силы, действующие со стороны газовой среды , носят реактивный характер и могут быть представлены в следующем виде:

$$R = -\sum_j m_j W_{rj} - \sum_j \frac{d\mu_j}{dt}\vartheta_r^2 ,$$

где m_j - масса *j*-ой частицы газа;

W_{rj} - относительное ускорение *j*-ой частицы газа при непрерывном изменении скорости, т.е. это ускорение, которое имела бы частица при отсутствии импульсного изменения скорости.

Сила

$$\Phi = -\frac{d\mu}{dt}(\vartheta_{r4} - \vartheta_r) ,$$

где ϑ_r -скорость частицы газа, носит импульсный характер, причём $\frac{d\mu}{dt}$ есть интенсивность расхода газа при раскрытии внешней полости от движения золотника 3 [1,рис1].

Величина силы Φ характеризует секундный расход относительного количества движения газа через выходное сечение системы $\mathfrak{M}$.

Выводы

Проведенные исследования по формированию граничных условий задачи Коши позволяют учитывать конструктивные особенности изделия на этапах эскизного проектирования и натурного моделирования, а также учитывать особенности режимов при выборе оптимальных конструкторских решений.

Литература

1. Щербина Е.С., Мельников М.А. Аналитический синтез обобщённой математической модели движения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков в энергетике// Енергетика: економіка, технології, екологія-2007,-№1, С. 3-10.
2. Щербина Е.С., Мельников М.А. Структура сил в обобщённой математической модели движения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков// Енергетика: економіка, технології, екологія-2007,-№2, С. 43-49.
3. Щербина Е.С., Мельников М.А. Динамические уравнения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков// Енергетика: економіка, технології, екологія-2008,-№1, С. 80-85.
4. Щербина Е.С., Мельников М.А. Особенности и формирование граничных условий задачи Коши в математической модели движения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков.1.Присоединение массы// Енергетика: економіка, технології, екологія-2009.-№1.-С.73 - 80.