

МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ТУРБУЛЕНТНОСТІ НА ПОЧАТКОВІЙ ДІЛЯНЦІ КАНАЛУ

Вступ

Процеси перенесення енергії в формі тепла та маси в техніці зустрічаються досить часто. Це апарати хімічної, нафтопереробної, енергетичної галузі для десорбції, ректифікації, охолодження, зволоження газів та ін. Часто-густо методика їх розрахунку будується на експериментальному вивченні процесів тепло- та масообміну. Проте, окрім цього, слід враховувати гідроаеродинамічний режим роботи таких пристроїв. Зокрема, відомо, що з переходом до турбулентного режиму виникає перемішування та вихрові потоки, які збільшують швидкість конвекції та призводять до зростання енергії потоку та її передачі в формі тепла або маси, тобто інтенсифікує роботу теплотехнічних апаратів. Таким чином, задача дослідження параметрів турбулентного потоку та визначення емпіричних коефіцієнтів є необхідною.

Враховання основної властивості турбулентного руху – його неупорядкованості – знайшло своє відображення в статистичних моделях турбулентності. Такі моделі [1-4] описують пульсації швидкості гармонічними функціями та враховують хаотичність течії на основі випадкових чисел. Першою математичною моделлю вихроутворення, що базується на статистичній природі вихорів в потоці, є [1], в якій початковий рух нестисливої рідини описано наступними рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos ax \sin by \sin cz \\ v &= B \sin ax \cos by \sin cz \\ \omega &= C \sin ax \sin ay \cos cz \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Оскільки для нестисливої рідини ρ – густина є сталою, на основі рівняння нерозривності

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho \omega)_z = 0$$

автор отримує рівняння для складових моделі:

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + Cc &= 0 \\ u_x + v_y + \omega_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Рівняння руху мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} -u_t &= uu_x + v u_y + \omega u_z + P_x / \rho - \nu \nabla^2 u \\ -v_t &= u v_x + v v_y + \omega v_z + P_y / \rho - \nu \nabla^2 v \\ -\omega_t &= u \omega_x + v \omega_y + \omega \omega_z + P_z / \rho - \nu \nabla^2 \omega \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Систему (2) розв'язують відносно тиску, диференціюють по x , y , z та, складаючи рівняння руху, отримують:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 P = u_x^2 + v_y^2 + \omega_z^2 + 2(u_x v_y + v_y \omega_z + u_x \omega_z).$$

Розв'язок цього рівняння знаходиться досить легко. Підставляючи (1) в (2), отримують рівняння для визначення u_t , інтегруючи яке, отримують

$$u = A(1 - \theta vt) \cos ax \sin by \sin cz + \frac{A_1}{a} t \sin 2ax \cos 2by - \frac{A_2}{a} t \sin 2ax \cos 2cz,$$

де $\theta = a^2 + b^2 + c^2$, а константи A_1 і A_2 отримано циклічною перестановкою a , b , c в сталій A_1 :

$$A_1 = \frac{b}{4} \left(A^2 b \frac{a^2}{b^2 + c^2} + ABa \right).$$

Подібні вирази отримано і для швидкостей v та ω . Щоб отримати наступну апроксимацію, процес повторюється з новими значеннями швидкостей u , v та ω в (1). Як видно, закладена в модель тривимірність пульсацій ускладнює її розрахунок.

Методи статистичного дослідження в фізиці відомі як методи Монте-Карло застосовують для моделювання неупорядкованого, хаотичного, турбулентного руху [2-4].

В [3] описано модель турбулентного руху на основі рівняння нестационарного одновимірного ламинарного руху з хаотичною зміною тиску

$$\frac{\partial U}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

де $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ - зміна тиску, що залежить від амплітуди, інтенсивності пульсацій A , часу t і випадкової величини ω .

Це дозволяє отримати аналітичне рівняння для розрахунку швидкостей турбулентного потоку в каналі, проте модель є одновимірною, тобто не враховуються пульсації в напрямку координат y, z .

Окрім цього, досить обмеженими є результати експериментів з запропонованими математичними моделями. Тому застосуємо метод Монте-Карло для вивчення двовимірного нестационарного турбулентного потоку в каналі, зокрема на початковій ділянці каналу.

Мета роботи та формулювання задач

В зв'язку з цим метою роботи є вивчення динамічної картини турбулентного потоку на початковій ділянці каналу на основі запропонованої математичної моделі. В ході виконання роботи вирішимо наступні задачі:

- на основі методу Монте-Карло та підходів [3-4] удосконалимо модель турбулентного потоку;
- тестування моделі проведемо шляхом порівняння з експериментальними результатами Нікурадзе;
- на основі математичної моделі проаналізуємо процес зародження турбулентності в потоці на початковій ділянці каналу.

Опис математичної моделі

Як відомо, за рахунок протидії сили тертя потоку об стінку швидкість течії біля стінки в так званому „граничному шарі” зменшується [5]. При цьому рідина перетікає від стінок до ядра потоку і швидкість в ньому зростає. З часом граничні шари (показані пунктиром) потовщуються і на певній відстані від входу зливаються. З цього моменту епора швидкості не залежить від сили тертя та не варіюється з часом, тобто потік потрапляє на ділянку стабілізації. Припустимо, що потік рухається в круглому циліндричному каналі по всій його довжині (рис. 1).



Рис. 1. Епора швидкостей у каналі

Запишемо рівняння руху в циліндричних координатах:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial}{\partial z} + U_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) U = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

Вводимо наступні допущення:

- вважаємо швидкість U в напрямку осі z переважною порівняно з швидкостями в інших напрямках. Тому швидкості руху потоку в напрямку інших координат не враховуємо $U_r \rightarrow 0, U_\varphi \rightarrow 0$;
- вважаємо рух потоку в напрямку z сталим, тобто $\frac{\partial U}{\partial z} \rightarrow 0$;
- через малість нехтуємо силою тяжіння $g = mg$.

Таким чином, отримуємо:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = v \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1)$$

Припустимо, що тиск у потоці є нестационарним і його зміна описується гармонічними коливаннями:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = k \cdot \frac{\rho U^2}{2} \sin(\omega \tau t), \quad (2)$$

де k – емпіричний коефіцієнт;

$\rho U^2 / 2$ – кінетична енергія потоку;

τ – час;

ω – випадкові числа.

Таким чином, отримуємо, що амплітуда пульсацій тиску в потоці обумовлена його кінетичною енергією. На основі експериментальних досліджень [6] встановлено значення коефіцієнта пропорційності $k = -0.2$, а випадкові числа моделюють локальні пульсації у вихорах.

Рівняння (1) та (2) розв'язувалися з початковими умовами – швидкість потоку в початковий момент стала $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$ та граничними умовами:

$$1) \text{ швидкість в центрі труби є максимальною } \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=0} = 0;$$

$$2) \text{ швидкість біля стінки для вихорового потоку є змінна величина } U = 0.6U|_{r=0} + \cos(\omega \tau t),$$

де перший доданок вказує на зменшення на 40% швидкості в пограничному шарі біля стінки порівняно з швидкістю в центрі потоку [7], а другий доданок – на наявність пульсацій в межах граничного шару.

Для чисельного розв'язання задачі використано кінцево-різницевий метод. Для цього введено рівномірну прямокутну сітку з кроками Δr і Δt в напрямках r, t . Замінивши часткові похідні на відповідні різниці, запишемо рівняння в алгебраїчному вигляді та, використовуючи явний метод, розрахуємо значення функції $U=f(r, t)$.

Верифікація математичної моделі

Для аналізу стійкості отриманого рішення оцінимо вплив кроку сітки на розподіл швидкостей потоку $U=f(r, t)$ при різних локальних значеннях радіуса труби r .

Вплив кроку сітки на розподіл швидкостей потоку повітря з температурою $t = 20^\circ\text{C}$ ($\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$) розраховано для труби радіусом $R = 0,015 \text{ м}$, при цьому час моделювання не перевищує $t = 0,5 \text{ с}$, а початкова швидкість складає $U|_{t=0} = 31 \text{ м/с}$. Тобто, критерій Рейнольдса:

$$Re = \frac{2Ur}{\nu} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-6}} = 60 \cdot 10^3, \text{ що перевищує критичне значення в 6 разів, отже потік є}$$

турбулентним.

В результаті моделювання отримано ряд двовимірних матриць розподілу швидкостей в каналі.

Далі визначався градієнт швидкості в моменти часу $t = 0,46 \dots 0,5 \text{ с}$ з інтервалом $0,01 \text{ с}$, тобто

$$\frac{\Delta U}{\Delta R} = \left| \frac{U_{R=7,5} - U_{R=3,75}}{7,5 - 3,75} \right|.$$

При цьому, як видно з рис.2, зменшення кроку розбивки до $0,278 \text{ мм}$ або 64 точок на радіус, як видно з таблиці 1, є достатньою умовою для стійкості отриманого рішення. Отже, подальше моделювання проводимо з кроком, що не перевищує $0,278 \text{ мм}$, наприклад – $0,1 \text{ мм}$.

Крок сітки в часі залежить від часу моделювання і для $t = 0,5 \text{ с}$ складає $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Таблиця 1

Кількість точок розбивки та крок сітки

Кількість точок, N	8	16	32	64	128	256
Крок сітки, мм	2,143	1	0,484	0,278	0,118	0,059

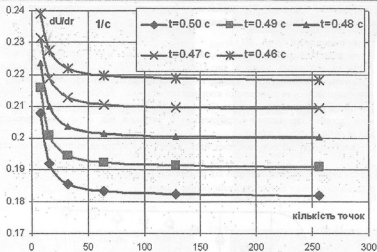


Рис. 2. Залежність градієнта швидкості від кроку сітки через $t = 0,46...0,5$ с

Для оцінки початкової ділянки розглянемо зміну епюри швидкостей в потоці з часом.

На рис. 3 показано епюри локальних значень швидкості залежно від часу руху в каналі. Видно, що швидкість в каналі змінюється з часом та відповідно і відстанню від входу в канал, зокрема епюри в моменти часу 0,05 та 0,1 с в межах граничного шару практично не різняться. Тобто, перехід до ділянки стабілізації відбувається за 0,05 с від входу в канал. За швидкості 31 м/с це відповідає 1,5 м від входу в канал або 50 діаметрам каналу.

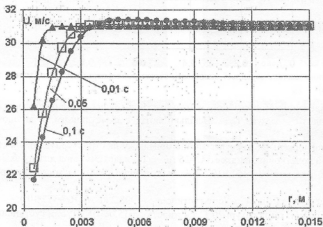


Рис. 3. Розподіл швидкостей залежно від радіуса труби та моменту часу

Порівняємо отримані епюри швидкостей $U=f(t,r)$ з літературними даними [9] Нікурадзе. Для цього усереднимо локальні швидкості на початковій ділянці каналу, $r=15$ мм :

$$U(r) = \frac{1}{t} \int_0^t U(t,r) dt = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N U(r)$$

де $U(r)$ – локальна швидкість в певний момент часу при сталому значенні радіуса;
 N – кількість часових точок, в яких це значення фіксується.

На рис. 4 середню швидкість повітря, розраховану з моделі за вищевказаною залежністю, порівняно з даними Нікурадзе [7] для труб. Очевидно, що епюри швидкостей різняться профілями, оскільки дані Нікурадзе відносяться до ділянки стабілізації потоку, тоді як модель розраховує

швидкості на початковій ділянці. Не дивлячись на це, відносно відхилення результатів моделювання від даних експерименту не перевищує 25%.

Результати моделювання

Користуючись запропонованою моделлю, відзначимо поведінку потоку в каналі в різні моменти часу. При цьому, якщо вважати, що $U=f(t,R)$, тобто швидкість в каналі залежить від поперечної координати та змінюється з часом, то можна вважати, що структура потоку в трубі залежить від його повздожньої та поперечної координати, тобто $U=f(z,R)$.

Розглянемо отримувані результати саме з такої точки зору. Проведемо три серії експериментів, в яких змодельовано процес зародження турбулентності залежно від основних параметрів, що входять до критерія Рейнольдса. Зокрема:

- як фізичні властивості потоку, зокрема його в'язкість і густина впливають на структуру течії;
- як змінюється структура течії залежно від швидкості потоку;
- яким чином на поведінку потоку впливає радіус каналу.

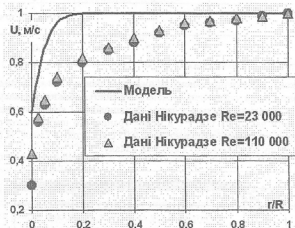


Рис. 4. Порівняння значень середньої швидкості, отриманої експериментально (точки) та розрахованої (пряма)

На рис. 5-7 наведено лінії постійної швидкості ізотакх залежно від абсциси, якою є значення часу t , с та ординати – радіуса r , м. Оскільки потік є симетричним, показано його верхню половину.

Перша серія досліджень включає імітаційне моделювання структури потоку в каналі радіусом $R=15$ мм при сталій початковій швидкості $U=25$ м/с за стандартних умов для трьох середовищ:

- масла МК з в'язкістю $\nu=1514 \cdot 10^{-6}$ м²/с та густиною $\rho=903$ кг/м³ за критерія Рейнольдса $Re=247$;
- води з в'язкістю $\nu=1,01 \cdot 10^{-6}$ м²/с та густиною $\rho=998,2$ кг/м³ ($Re=375 \cdot 10^3$);
- сухого повітря при температурі 20°C з в'язкістю $\nu=15,06 \cdot 10^{-6}$ м²/с та густиною $\rho=1,205$ кг/м³ ($Re=25 \cdot 10^3$).

На рисунках 5а, б, в наведено результати моделювання структури потоку.

Як видно з рис. 5а потік є структурованим і ламінарним. Оскільки в'язкість масла – величина значна, то вже на відстані $z=0,1 \cdot 30=3$ м від входу швидкість в каналі стає повністю розвинутою, оскільки U/U_{max} не залежить від часу. Потік на рис. 5б є турбулентним і включає в себе вихорові пульсації та динамічний граничний шар. Зокрема, з рис. 5б видно, що через 6 м товщина граничного шару складе 2 мм, а через 12 м – 3 мм, що підтверджується розрахунками. З рис. 5в видно, що через 1...2 с від входу відбувається зародження вихору, та далі він поступово згасає і через 10 с (300 м) потік стабілізується, а швидкості в поперечному перерізі потоку практично вирівнюються ($Re=62 \cdot 10^3$), а швидкості відповідають турбулентному профілю. Якщо порівнювати рис.5а - 5в, то видно, що поодинокі вихори, які існують в потоці при $Re=62 \cdot 10^3$, при зменшенні в'язкості зливатимуться.

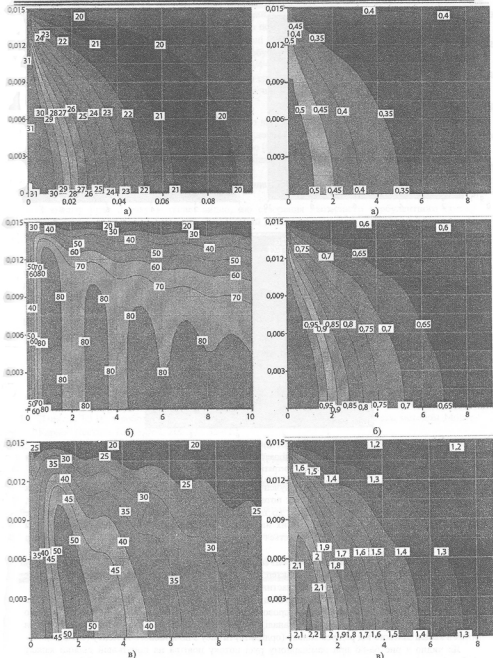


Рис. 5 а-б-в. Розподіл ізотех в потоці залежно від часу в секундах (абсциса) та поперечної координати в метрах (ордината) для масла МК, води та сухого повітря (зверху вниз)

Рис. 6 а-б-в. Розподіл ізотех в потоці залежно від часу (абсциса) та поперечної координати для різних швидкостей на вході 0,41 0,82 та 1,64 м/с ($Re=810, 1620, 3240$ зверху вниз)

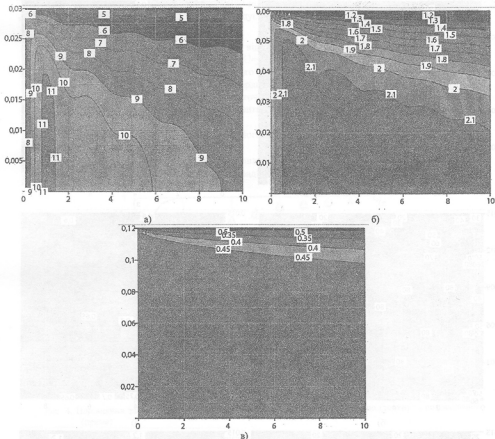


Рис. 7 а-б-в. Розподіл ізотех в потоці залежно від часу (абсциса) та поперечної координати для радіусів труби 30, 60 та 120 мм при сталій витраті повітря ($Re = 30.9 \cdot 10^3, 15.4 \cdot 10^3, 7.7 \cdot 10^3$ відповідно)

Відносно вихрових утворень в турбулентному потоці слід відмітити наступне. Вихор, як самостійно існуюча одиниця, перетворює потенціальну енергію тиску в кінетичну енергію руху, завдяки чому швидкості з наближенням до центра (ока) вихору віростають, а тиск падає. Це призводить до засмокування в нього нових мас потоку. Проте, з іншого боку, в вихорі кінетична енергія за рахунок сил тертя перетворюється в теплоту, теплову енергію і таким чином вихор може затухати.

Як видно з рис. 5в у повітряному потоці такий вихор існує на відстані близько 60 м від входу та носить локальний - затухаючий характер. На відміну від цього в потоці води вихор не є затухаючим, що пов'язано з фізичними властивостями середовища.

Наступна серія імітаційних досліджень проводилася з метою моделювання зародження вихорів на початковій ділянці каналу. Дослідження проводилося для потоку повітря швидкістю від $U=0.5$ до 2 м/с ($Re=996 \dots 3984$), що рухається в каналі радіусом 15 мм. На рис. 6а-6в показано розподіл ізотех в каналі залежно від радіуса каналу (ордината) та часу з початкового моменту (абсциса).

Як видно з рис 6а-6б при ламінарному русі потоку повітря на початковій ділянці каналу відбувається формування епори швидкостей, яке завершується на відстані близько 0,5 м від входу за швидкості 0,41 м/с і 1,5 м для швидкості 0,82 м/с. При цьому довжина ділянки визначалася на основі абсциси та швидкості потоку. Однак за швидкості потоку 1,64 м/с на початковій ділянці формується турбулентний рух, що викликає утворення вихору в каналі на відстані 1,5 м від входу. Проаналізуємо вплив геометрії ділянки на структуру повітряного потоку. Якщо ту ж саму масову витрату повітря подавати в канал більшого діаметра, картина зміниться. Зокрема, на рис. 7

показано вплив зміни радіуса каналу на розподіл швидкості в потоці за сталої масової витрати. На рис. 7а радіус зростає вдвічі до 30 мм, швидкість в початковий момент часу складає $31/4=7,8$ м/с, $Re=30,87 \cdot 10^3$, проте вихори в турбулентному потоці зберігаються. На рис. 7б швидкість складає $31/4=1,94$ м/с, за радіуса 60 мм і $Re=15,4 \cdot 10^3$ турбулентний вихровий потік витягується вздовж осі. На рис. 7в швидкість в центрі складає $31/4/4=0,484$ м/с за радіуса 120 мм і $Re=7,71 \cdot 10^3$. Проте картина кардинально змінюється – в каналі спостерігається ламінарний рух за відсутності вихорів. Навіть за такого, досить високого значення числа Рейнольдса.

Висновки

Запропонована математична модель адекватно відображає розподіл локальних швидкостей в турбулентному потоці, що підтверджується відомими літературними даними. На основі отриманого поля швидкостей в каналі за методикою [9, 10] можна визначити значення коефіцієнта турбулентного обміну, що дозволяє враховувати вплив вихрових структур потоку на перенесення енергії в формі тепла та маси.

В результаті досліджень показано, як довжина початкової ділянки в каналі залежить від швидкості потоку на вході.

З аналізу руху потоку в каналі видно, що створення хаотичного турбулентного потоку характеризується наявністю вихорів на початковій ділянці. Ці вихори, напевно, в подальшому розпадаються на локальні вихори та призводять до хаотичного, турбулентного руху в потоці.

Зокрема встановлено, що зі зростанням в'язкості потоку кількість локальних вихорів в потоці зменшується, або, як у випадку руху масла – вони зовсім не виникають. Це пояснюється переважаючим впливом сил в'язкості над силами інерції в потоці. Встановлено, що час існування вихорів в потоці більшою мірою залежить від в'язкості потоку та радіуса каналу і в меншій мірі від швидкості потоку.

Разом з цим, якщо збільшення сил інерції відбувається опосередковано – за рахунок збільшення радіуса каналу, то безвихрова ламінарна течія потоку зберігається навіть за значних чисел Рейнольдса $Re \approx 7,7 \cdot 10^3$.

Література

1. G.I Taylor, "Statistical Theory of Turbulence, Part I", Proceeding of the Royal Society, A, vol. CLI, pp. 421-44, 1935, reprint.
2. R.J. Fateman Symbolic computation of turbulence and energy dissipation in the Taylor model// Int. J. Modern Physics 1998, vol. 9, No3, pp 509-525.
3. Денисов Ю.Н., Слободянюк В.С. Исследование структуры турбулентности методом Монте-Карло// Вестник КРСУ №2, 2002, С. 35-41.
4. Кузьменко И.Н., Ногин Н.В., Молодид А.К., Смаковский Д.С. „Моделирование турбулентного потока методом статистических испытаний”// Труды Восточно-украинского ун-та им. Даля №2, 2007 – С. 45-51.
5. С.В. Патанкар Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах, М: Из-во МЭИ, 2003– 180 с.
6. Кузьменко І.М. „Визначення параметрів вихрового потоку”// Енергетика: економіка, технології, екологія, 2007, – №2, С. 43-50.
7. Г. Шлихтинг „Теория пограничного слоя”, перевод под ред. Лойцянского Л.Г. Из-во „Наука”, 1974 – 713 с.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1978. - 736 с.