УДК 621.311

Е.С.ЩЕРБИНА, М.А.МЕЛЬНИКОВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КЛАПАНА ГАЗОВЫХ ГОРЕЛОЧНЫХ БЛОКОВ

Настоящая работа продолжает цикл статей, связанных с исследованием электромагнитного клапана (ЭМК) газовых горелочных блоков $[1,2]$. В них синтезирована математическая модель ЭМК в форме уравнений Лагранжа-Максвелла, определена в этой модели структура сил и введена мера μ электромеханического взаимодействия в магнитном поле подсистем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, составляющих физическую схему ЭМК. Эти уравнения имеют вид $[2]$:

$$m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]j}+c_{[\nu]j}x_{[\nu]j}=\frac{1}{2}\mu^{[\nu]}\mathrm{I}_{[\nu]}-m^{[\nu]}g\,, \tag{1}$$

$$\underset{j=1,2,\nu\in[1,5]}{L(x_{[\nu]j})\dot{\mathrm{I}}_{[\nu]}}+R\mathrm{I}_{[\nu]}=e_{[\nu]}-\mu^{[\nu]}\dot{x}_{[\nu]j}\,,$$

где

$$\mu^{[\nu]}=\frac{\partial L\left(x_{[\nu]j}\right)}{\partial x_{[\nu]j}}\mathrm{I}_{[\nu]}\,. \tag{2}$$

Ставится задача установления параметрических связей в функциях L, $\mu^{[\nu]}$ и $P_T^{[\nu]}$, входящих в

(1), где в качестве параметров выступают электромагнитомеханические характеристики системы $\mathfrak{M}$ в целом.

Все ограничения, введённые в $[1,2]$, работают ниже.

1 Определение индуктивности L

Рассматривается индуктивность L подсистемы $\mathfrak{M}_2$ как сложная функция, зависящая от геометрических, кинематических и физических параметров системы $\mathfrak{M}$ в целом, т.е.

$$L = L\left(x_{[\nu]}; w, \delta_{[\nu]}, S_\phi, S_в\right), \tag{3}$$

где $x_{[\nu]}$ - перемещение подсистемы $\mathfrak{M}_1$, характеризуемое перемещением якоря 1 и присоединяемых к нему элементов подсистемы $\mathfrak{M}_1$ в различных ν фазах его движения:

w - число витков обмотки электромагнита I;

$\delta_{[\nu]}$ - ширина воздушного зазора;

S_ϕ - площадь поперечного сечения ферромагнитного участка зазора;

$S_в$ - площадь поперечного сечения воздушного зазора.

Необходимо получить зависимость (3) для ν фаз движения системы $\mathfrak{M}$.

В $[2]$ определена электромагнитная сила $P_T^{[\nu]}$, задаваемая формулой

$$P_T^{[\nu]} = \frac{\partial T^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]}} = \frac{1}{2}\frac{\partial L(x_{[\nu]})}{\partial x_{[\nu]}} \mathrm{I}_{[\nu]}^2 = \frac{1}{2}\mu^{[\nu]}\mathrm{I}_{[\nu]}, \tag{4}$$

в которой функция Лагранжа $\mathfrak{I}^{[\nu]}$ имеет следующее аналитическое представление $[2]$:

$$\mathfrak{I}^{[\nu]} = \frac{1}{2}\left[m^{[\nu]}\dot{x}_{[\nu]}^2 + L(x_{[\nu]})\mathrm{I}_{[\nu]}^2\right] - \frac{1}{2}c_{[\nu]}x_{[\nu]}^2 - m^{[\nu]}gx_{[\nu]}. \tag{5}$$

Используя (5), имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{I}^{[\nu]}}{\partial \mathrm{I}_{[\nu]}} = L(x_{[\nu]})\mathrm{I}_{[\nu]} = \psi_{[\nu]}, \tag{6}$$

где $\psi_{[\nu]}$ - потокосцепление в подсистеме $\mathfrak{M}_2$. С другой стороны, функцию $\psi_{[\nu]}$ можно выразить через магнитный поток $\Phi_{[\nu]}$, постоянный вдоль каждого участка цепи $[3]$, т.е.

$$\psi_{[\nu]} = w\Phi_{[\nu]}. \tag{7}$$

Тогда на основании (6) и (7) имеем:

$$(x_{[\nu]}) = \frac{w\Phi_{[\nu]}}{\mathrm{I}_{[\nu]}} \tag{8}$$

Закон Ома для замкнутой магнитной цепи $[3]$ даёт

$$\Phi_{[\nu]} = \frac{F_m^{[\nu]}}{R_m} = \frac{w\,\mathrm{I}_{[\nu]}}{R_m}, \tag{9}$$

где $F_m^{[\nu]} = w\mathrm{I}_{[\nu]}$ - м.д.с., а R_m - полное магнитное сопротивление цепи подсистемы $\mathfrak{M}_2$, причём

$$R_m^{[\nu]} = R_\phi^{[\nu]} + R_в^{[\nu]}, \tag{10}$$

где $[3]$

$$R_\phi^{[\nu]} = \frac{l_\phi^{[\nu]}}{\mu_\phi S_\phi} \tag{11}$$

есть сопротивление магнитного участка цепи, а

$$R_в^{[\nu]} = \frac{\delta^{[\nu]}}{\mu_в S_в} \tag{12}$$

сопротивление участка воздушного зазора шириной $\delta^{[\nu]}$.

Тогда на основании (11) и (12) формула (10) запишется в виде:

$$R_m^{[\nu]} = \frac{l_\phi}{\mu_\phi S_\phi} + \frac{\delta^{[\nu]}}{\mu_в S_в}, \tag{13}$$

где μ_ϕ и $\mu_в$ - коэффициенты магнитной проницаемости ферромагнитного участка цепи и зазора соответственно;

l_ϕ - длина ферромагнитного участка цепи.

Величина воздушного зазора определяется по формуле:

$$\delta^{[\nu]} = \delta_0 - 2x_{[\nu]}, \tag{14}$$

где δ_0 - начальное значение ширины воздушного зазора и оно является максимальным при $t = t_0$;

$x_{[\nu]}$ - координата, отсчитываемая от начального положения якоря 1 вдоль оси OX.

Для магнитного участка цепи системы $\mathfrak{M}_2$ всегда выполняется условие $\mu_\phi >> \mu_в$ [3]. Это приводит к концентрации магнитного поля в основном в объёмах, занимаемых элементами конструкции ЭМК, изготовленных из ферромагнитного материала. Участки магнитного поля за пределами магнитной цепи образуют области магнитных потоков рассеяния и в дальнейшем в магнитную цепь не включаются.

Тогда на основании (13) и (14) формула (9) записывается в виде:

$$\Phi_{[\nu]} = \frac{w\mathrm{I}_{[\nu]}}{R_m} = \frac{w\mathrm{I}_{[\nu]}}{\dfrac{l_\phi^{[\nu]}}{\mu_\phi S_\phi} + \dfrac{\delta_0 - 2x_{[\nu]}}{\mu_в S_в}}, \tag{15}$$

а индуктивность L, определяемая формулой (8), после элементарных преобразований представима как

$$L(x_{[\nu]}) = \frac{w\Phi_{[\nu]}}{\mathrm{I}_{[\nu]}} = \frac{\mu_в S_в w^2}{\delta_0 + \dfrac{\mu_в S_в}{\mu_\phi S_\phi} l_\phi - 2x_{[\nu]}}. \tag{16}$$

Вводя обозначения

$$2\alpha = \delta_0 + \frac{\mu_в S_в}{\mu_\phi S_\phi} l_\phi, \tag{17}$$

$$2\beta = \mu_в S_в w^2, \tag{18}$$

формула (16) приобретает следующий канонический вид:

$$L(x_{[\nu]}) = \frac{\beta}{\alpha - x_{[\nu]}}. \tag{19}$$

Таким образом, из аналитических представлений (17) - (19) следует, что параметры α и β определяют конструктивные особенности магнитной цепи для формирования тягового усилия электромагнита и связаны с выбором материала электромагнита, якоря, величины максимального зазора δ_0 и числа витков w обмотки.

2 Определение меры $\mu^{[\nu]}$

В [2] указывалось, что мера $\mu^{[\nu]}$ характеризует группу перекрёстных связей системы в ν фазах её движения. Используя аналитические представления (2) и (19), получаем

$$\frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}} = \beta\left(\alpha - x_{[\nu]}\right)^{-2}, \tag{20}$$

и

$$\mu^{[\nu]} = \left|\frac{\partial L(x_{[\nu]})}{\partial x_{[\nu]}} \mathrm{I}_{[\nu]}\right| = \frac{\beta \mathrm{I}_{[\nu]}}{\left(\alpha - x_{[\nu]}\right)^2}. \tag{21}$$

В развёрнутом виде, т.е. с учётом (17) и (18), формула (21) записывается как

$$\mu^{[\nu]} = 2\mu_в S_в \left(\delta_0 + \frac{\mu_в S_в}{\mu_ф S_ф} l_ф - 2x_{[\nu]}\right)^{-2} w^2 \mathrm{I}_{[\nu]} . \qquad (22)$$

На основании (6), (7) и (9) имеем ещё одну запись (22), а именно:

$$\mu^{[\nu]} = 2L(x_{[\nu]})\mathrm{I}_{[\nu]} = 2\psi_{[\nu]} = 2w\phi_{[\nu]} . \qquad (23)$$

Тогда для магнитного потока имеем:

$$\Phi_{[\nu]} = \frac{\mu^{[\nu]}}{2w} = \mu_в S_в \left(\delta_0 + \frac{\mu_в S_в}{\mu_ф S_ф} l_ф - 2x_{[\nu]}\right)^{-2} w^2 \mathrm{I}_{[\nu]} . \qquad (24)$$

Диапазон изменения меры $\mu^{[\nu]}$ в ν фазах движения системы $\mathfrak{M}$ определяется из следующего выражения:

$$\mu^{[\nu]} = \begin{cases} \mu^{[\nu]}_{\min} = \dfrac{\beta\, \mathrm{I}_0}{\alpha^2} \Leftrightarrow t_0 = 0, \delta = \delta_0, x_{[1]} = 0 \\ \mu^{[\nu]}_{\max} = \dfrac{\beta\, \mathrm{I}_{[\nu]0}}{(\alpha - h_{[\nu]})^2} \Leftrightarrow t = t_{[\nu]1}, \delta = \delta_0 - 2h_{[\nu]} \end{cases}, \qquad (25)$$

где $h_{[\nu]}$ - характеризует расстояние, проходимое якорем 1 в фазе $[\nu]$.

Из анализа полученных аналитических представлений следует, что мера $\mu^{[\nu]}$ связывает геометрические, механические, электрические и магнитные параметры системы $\mathfrak{M}$.

3 Определение электромагнитной силы $P_T^{[\nu]}$

На основании (20) и (21) электромагнитная сила $P_T^{[\nu]}$, определяемая формулой (4), записывается в виде:

$$P_T^{[\nu]} = \frac{1}{2}\beta\left(\alpha - x_{[\nu]}\right)^{-2} \mathrm{I}^2_{[\nu]} = \frac{1}{2}\mu^{[\nu]}\mathrm{I}_{[\nu]} , \qquad (26)$$

где в развёрнутом виде $\mu^{[\nu]}$ определяется формулами (21), (22) или (23). Экстремальные значения $P_T^{[\nu]}$ в (26) задаются посредством использования формул (25).

Из анализа выражения (26) видно, что $P_T^{[\nu]}$, как функция, является монотонно возрастающей во временном интервале $\left[0, t_{[\nu]}\right]$. При изменяющемся токе $\mathrm{I}_{[\nu]}$ (возрастании) тяговое усилие электромагнита растёт и при некотором значении $P_T^{[\nu]}$ увеличивается меньше и, наконец, почти совсем перестаёт увеличиваться. При неизменном токе $\mathrm{I}_{[\nu]}$, но при изменяющемся положении якоря 1 при малых воздушных зазорах $\delta^{[\nu]}$ тяговое усилие $P_T^{[\nu]}$ велико, при достижении определённого значения зазора $\delta^{[\nu]}$ усилие быстро падает, т.е. дальше определённого расстояния электромагнит уже не может тянуть. Участок, где приблизительно $P_T^{[\nu]}$ постоянно, есть полость магнита, в которой поверхность якоря 1 хорошо противопоставлена верхней поверхности электромагнита. Сильное падение $P_T^{[\nu]}$ начинается с того момента, когда верхняя часть якоря 1 выходит совсем из полости электромагнита [1, рис. 1].

4 Некоторые формы математических моделей движения системы $\mathfrak{M}$

Уравнение движения (1) системы $\mathfrak{M}$ в ν фазах её движения с учётом (21) в форме уравнений Лагранжа-Максвелла представимы в виде:

$$m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]} + c_{[\nu]}x_{[\nu]} = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\left(\alpha - x_{[\nu]}\right)^2}\mathrm{I}^2_{[\nu]} - m^{[\nu]}g . \qquad (27)$$

$$\frac{\beta}{\left(\alpha - x_{[\nu]}\right)}\dot{\mathrm{I}}_{[\nu]} + RI_{[\nu]} = e_{[\nu]} - \frac{\beta}{\left(\alpha - x_{[\nu]}\right)^2}\mathrm{I}_{[\nu]}\dot{x}_{[\nu]} .$$

Из (27) следует очевидная их другая форма, а именно:

$$m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]}+c_{[\nu]}x_{[\nu]}=\frac{1}{2}\frac{\beta}{\left(\alpha-x_{[\nu]}\right)^2}\mathrm{I}_{[\nu]}^2-m^{[\nu]}g\,, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\left(\alpha-x_{[\nu]}\right)}\mathrm{I}_{[\nu]}\right)=e_{[\nu]}-RI_{[\nu]}\,.$$

Получим уравнения движения системы в форме уравнений Рауса $[4]$. Такая возможность предоставляется в связи с тем, что обобщённая координата $q_{[\nu]}$ в функцию Лагранжа $\mathfrak{I}^{[\nu]}$, определяемую формулой (5), не входит и эта координата $q_{[\nu]}$ - циклическая. Тогда уравнения Рауса для системы $\mathfrak{M}$ в общем виде представимы как:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{R}^{[\nu]}}{\partial\dot{x}_{[\nu]}}-\frac{\partial\mathfrak{R}^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]}}=0\,, \tag{29}$$

где $\mathfrak{R}^{[\nu]}$ - функция Рауса системы, порождаемая функцией Лагранжа $\mathfrak{I}^{[\nu]}$ (5).

Так как координата $q_{[\nu]}$ - циклическая, то отсюда, на основании (5), имеем:

$$\frac{\partial\mathfrak{I}^{[\nu]}}{\partial\dot{q}_{[\nu]}}=0\,, \tag{30}$$

а используя аналитическое представления (6), получаем:

$$\mathrm{I}_{[\nu]}=\frac{\psi_{[\nu]}}{L(x_{[\nu]})}\,, \tag{31}$$

где $\mathrm{I}_{[\nu]}=\dot{q}_{[\nu]}$.

Функция Рауса с учётом (31) и (5) после преобразований записывается в виде:

$$\mathfrak{R}^{[\nu]}=\psi_{[\nu]}\mathrm{I}_{[\nu]}-\mathfrak{I}^{[\nu]}=-\frac{1}{2}\frac{\psi_{[\nu]}^2}{L^2(x_{[\nu]})}\frac{\partial L(x_{[\nu]})}{\partial x_{[\nu]}}+c_{[\nu]}x_{[\nu]}+m^{[\nu]}g\,. \tag{32}$$

Подействовав дифференциальным оператором

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_{[\nu]}}-\frac{\partial}{\partial x_{[\nu]}}\right)$$

на правую часть функции Рауса (32), уравнения Рауса (29) приводятся к форме:

$$m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]}+c_{[\nu]}x_{[\nu]}=\frac{1}{2}\frac{\psi_{[\nu]}^2}{L^2(x_{[\nu]})}\frac{\partial L(x_{[\nu]})}{\partial x_{[\nu]}}-m^{[\nu]}g\,. \tag{33}$$

Подставляя формулы (19) и (20) в правую часть (33), приходим окончательно к следующим уравнениям после преобразований:

$$m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]}+c_{[\nu]}x_{[\nu]}=\frac{1}{2\beta}\psi_{[\nu]}^2-m^{[\nu]}g\,. \tag{34}$$

Из уравнений (34) определяются $x_{[\nu]}$ как функции времени t. Из (32) следует:

$$\frac{\partial\mathfrak{R}^{[\nu]}}{\partial\psi_{[\nu]}}=\mathrm{I}_{[\nu]}\,. \tag{35}$$

Тогда (31) и (35) приводят к аналитическому представлению:

$$\mathrm{I}_{[\nu]}=\dot{q}_{[\nu]}=\frac{\psi_{[\nu]}}{L(x_{[\nu]})}\,, \tag{36}$$

откуда следует $q_{[\nu]} = \int \frac{\psi_{[\nu]}}{L(x_{[\nu]})} dt$. (37)

Далее в (37) необходимо подставить решение уравнений (34).

Таким образом, возможность введения функции Рауса (32) позволила понизить число уравнений на одну единицу.

Выводы

Установлены параметрические связи в функциях индуктивности, электромагнитной силы и в перекрёстных связях, связывающие геометрические, кинематические и физические параметры ЭМК. Эти связи выполняют роль критериальных оценок функционирования системы на этапе проектирования и принятия решений о выборе оптимальной конструкции ЭМК.

Получены уравнения движения системы в форме Рауса, позволяющие понизить число уравнений движения.

Литература

1. Щербина Е.С., М.А.Мельников Аналитический синтез обобщенной математической модели движения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков в энергетике/ Енергетика: економіка, технології, екологія.- № 1(20).- К.:2007. С. 3-10.
2. Щербина Е.С., М.А.Мельников. Структура сил в обобщенной математической модели движения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков/ Енергетика: економіка, технології, екологія.- № 2.- К.:2007.
3. Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Ч.1., Физические основы электротехники, Госэнергоиздат, М.-Л., 1948, 335с..
4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике, М.: Наука, 1966, 300 с.