УДК 621.311

Е.С.ЩЕРБИНА, М.А.МЕЛЬНИКОВ

СТРУКТУРА СИЛ В ОБОБЩЁННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КЛАПАНА ГАЗОВЫХ ГОРЕЛОЧНЫХ БЛОКОВ

Введение

Настоящая работа является продолжением исследований, изложенных в [1]. В работе [1] синтезирована обобщённая математическая модель электромагнитного клапана (ЭМК) и сформулирована задача Коши в виде:

$$\mathfrak{M}: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial q_i} + \frac{\partial D^{[\nu]}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{[\nu]}, \mathrm{i} \in [1, n], \quad \nu \in [1,5]$$

$$\begin{aligned} t = t_{\nu 0} &: q_i^{[\nu]}(t_{\nu 0}) = q_{i0}^{[\nu]}, \\ &\dot{q}_i^{[\nu]}(t_{\nu 0}) = \dot{q}_{i0}^{[\nu]} \\ t = t_{\nu 1} &: q_{i1}^{[\nu]}(t_{\nu 1}) = q_{i1}^{[\nu]}, \\ &\dot{q}_{i1}^{[\nu]}(t_{\nu 1}) = \dot{q}_{i1}^{[\nu]}, \end{aligned} \tag{1}$$

где в состав системы $\mathfrak{M}$ входят механическая подсистема $\mathfrak{M}_1$ и электромагнитная подсистема $\mathfrak{M}_2$;

 ISSN 1813-5420

$\mathcal{L}^{[\nu]}$ - функция Лагранжа;

$D^{[\nu]}$ - диссипативная функция Релея;

$Q_i^{[\nu]}$ - обобщенная сила, носящая неконсервативный характер;

$[\nu]$ - номер фазы движения системы $\mathfrak{M}$;

$t_{\nu 0}$ - начальное время фазы $[\nu]$;

$t_{\nu 1}$ - время окончания фазы $[\nu]$.

Там же в [1] указывалось, что система $\mathfrak{M}$ имеет переменную массу и переменное число степеней свободы, изменяющихся в дискретные моменты времени $t_{\nu 1}$.

Ниже ставятся следующие задачи:

1) определение структуры сил, действующих на систему $\mathfrak{M}$, в различных фазах её движения в задаче Коши (1);

2) получение первичных критериальных характеристических функций для формирования оптимальных конструкторских решений при проектировании изделия, связывающих механические и электромагнитные параметры подсистем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ системы $\mathfrak{M}$ соответственно.

1 Ограничения на механические и электромагнитные параметры системы $\mathfrak{M}$. Уравнения Лагранжа II рода

В дальнейшем учитываются следующие допущения:

1) пренебрегаем потенциальной энергией электрической части подсистемы $\mathfrak{M}_2$ системы $\mathfrak{M}$;

2) пренебрегаем диссипативными свойствами взаимодействующих сред механической подсистемы $\mathfrak{M}_1$, т.е. не учитываются силы трения между механическими элементами конструкции ЭМК, частицами газа и внутренней оболочки ползуна 2 и внешней оболочкой якоря 1 и золотника 3 [1];

3) диссипация электромагнитной системы $\mathfrak{M}_2$ связана с мерой убывания электромагнитной энергии в единицу времени;

4) магнитная цепь неразветвленная, состоит из трех участков и включает в себя сердечник, выполненный из магнитомягкого ферромагнетика с обмоткой, воздушного зазора и ферромагнитного якоря 1, замыкающего цепь;

5) масса системы $\mathfrak{M}_1$ во временных фазах $[\nu]$ меняется дискретно и определяется по формуле

$$m^{[\nu]}(t)=\begin{cases} m_1, & 0\le t<t_1\\ m_1+m_1, & t_1\le t<t_2\\ m_1+m_2+m_1, & t_1\le t<t_3\\ m_1+m_2+m_1, & t_3\le t<t_4\\ m_1+m_2+m_1, & t_1\le t\le T\end{cases} \tag{2}$$

На основании введенных допущений кинетическая и потенциальная энергии, диссипативная функция системы $\mathfrak{M}$ запишутся соответственно в виде:

$$\begin{aligned} T^{[\nu]} &= T_M^{[\nu]}+W_m^{[\nu]},\\ \Pi^{[\nu]} &= \Pi_M^{[\nu]}+W_e^{[\nu]}=\Pi_M^{[\nu]},\\ D^{[\nu]} &= D_M^{[\nu]}+D_e^{[\nu]}=D_e^{[\nu]}, \end{aligned} \tag{3}$$

где индексы "M", "m" и "e" присваиваются механической, магнитной и электрической частям функций системы $\mathfrak{M}$.

Тогда функция Лагранжа представима в форме

$$\mathscr{L}^{[\nu]} = T^{[\nu]} - \Pi^{[\nu]} \underset{(3)}{\overset{def}{=\!=}} T_M^{[\nu]} + W_m^{[\nu]} - \Pi_M^{[\nu]}, \qquad (4)$$

а уравнения Лагранжа II рода (1) вырождаются в следующее представление:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_e^{[\nu]}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{[\nu]}, \qquad i \in [1, 3] \qquad (5)$$

где i определяет число степеней свободы системы $\mathfrak{M}$ в фазе $[\nu], \nu \in [1,5]$, q_i - обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ - обобщенные скорости.

2 Структура сил и их физическое содержание в задаче Коши (1)

Базовым дифференциальным уравнением в форме Лагранжа II рода выступают уравнения (5). В них классифицирующие признаки в определении структуры слагаемых и их физическое содержание порождаются действием дифференциального оператора Лагранжа

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) \qquad (6)$$

на функцию Лагранжа $\mathscr{L}^{[\nu]}$, определяемую формулой (4), и дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ на диссипативную функцию Релея $D_e^{[\nu]}$ для всех ν фаз движения системы $\mathfrak{M}$.

Характеристические функции в (4) записываются в следующем виде:

$$T^{[\nu]} = T_M^{[\nu]} + W_m^{[\nu]} = \frac{1}{2} m^{[\nu]} \dot{x}_{[\nu]}^2 + \frac{1}{2} L\left(x_{[\nu]}\right) I_{[\nu]}^2,$$

$$\Pi_M^{[\nu]} = \frac{1}{2} C_{[\nu]} x_{[\nu]}^2 + m^{[\nu]} g x_{[\nu]}, \qquad (7)$$

$$\mathscr{L}^{[\nu]} = \frac{1}{2}\left[m^{[\nu]} \dot{x}_{[\nu]}^2 + L\left(x_{[\nu]}\right) I_{[\nu]}^2\right] - \frac{1}{2} C_{[\nu]} x_{[\nu]}^2 - m^{[\nu]} g x_{[\nu]},$$

$$D_e^{[\nu]} = \frac{1}{2} R I_{[\nu]}^2,$$

где $L\left(x_{[\nu]}\right)$ - индуктивность цепи и она в самом общем случае есть функция перемещения механической системы $\mathfrak{M}_1$, т.е. $L = L\left(x_{[\nu]}\right)$ в каждой из ν фаз движения якоря 1;

R - активное сопротивление участка цепи подсистемы $\mathfrak{M}_2$;

$I_{[\nu]}$ - ток в цепи подсистемы $\mathfrak{M}_2$ в каждой из ν фаз движения подсистемы $\mathfrak{M}_1$;

g - ускорение свободного падения;

$C_{[\nu]}$ - жесткость упругих элементов 5 и 6 подсистемы $\mathfrak{M}_1$;

$q_1 = x_{[\nu]}$ - обобщенная координата, характеризующая линейное перемещение подсистемы $\mathfrak{M}_1$ в каждой из ν фаз её движения, а отсчет положения подсистемы $\mathfrak{M}_1$ производится от положения ненагруженных упругих элементов 5 и 6 в сторону увеличения $x_{[\nu]}$-ой координаты;

$\dot{q}_1 = \dot{x}_{[\nu]}$ - обобщенная скорость подсистемы $\mathfrak{M}_1$;

$q_2 = q_{[\nu]}$ - электрическая обобщенная координата подсистемы $\mathfrak{M}_2$, характеризующая заряд электричества этой подсистемы;

$\dot{q}_2 = \dot{q}_{[\nu]} = I_{[\nu]}$ - электрическая обобщенная скорость подсистемы $\mathfrak{M}_2$, характеризующая ток в цепи этой же подсистемы.

Анализ функции Лагранжа $\mathscr{L}$ в (7) указывает, что обобщенная координата $q_{[\nu]}$ - циклическая, а значит в аналитическом представлении (5) функция

$$\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial q_{[\nu]}} = 0. \tag{8}$$

Кроме того, неконсервативными силами, действующими на подсистему $\mathfrak{M}_1$, пренебрегаем, т.е.

$$Q_i^{[\nu]} = 0, i = 1,2. \tag{9}$$

С учетом (8) и (9) уравнения Лагранжа II рода (5) в обобщенных координатах $x_{[\nu]}$ и $q_{[\nu]}$ для системы $\mathfrak{M}$ представимы в виде:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial \dot{x}_{[\nu]j}} - \frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]j}} = 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}} = Q_{I[\nu]} - \frac{\partial D_e^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}}, \\ j = 1,2\,, \quad \nu \in [1,5]. \end{gathered} \tag{10}$$

Следует отметить, что при $\nu \in (1,2,3,5)$ в (10) $j = 1$, а во временном интервале $t \in [0,t_3] \cup [t_4,T]$ масса системы $\mathfrak{M}_1$ изменяется импульсно согласно формуле (2), причём коэффициент жёсткости системы $\mathfrak{M}_1$ $C_{[1]} = 0$. При $\nu = 4$ в (10) $j \in (1,2)$, прекращается действие упругого элемента 5 с коэффициентом жёсткости C_5 до момента времени $t = T$, соответствующего окончанию пятой фазы движения системы $\mathfrak{M}$. При $\nu = 4$ золотник 3 совершает сложное движение. Его движение относительно системы "ползун 2 – якорь 1" относительное, движение системы "ползун 2 – якорь 1" относительно корпуса ЭМК, с которым связана неподвижная система координат $OXYZ$, есть переносное движение и движение золотника 3 относительно той же системы координат $OXYZ$ - абсолютное движение.

Для реализации поставленной выше задачи используется общее уравнение динамики в обобщенных координатах $x_{[\nu]j}$ и $q_{[\nu]}$. Используя (10), получаем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial \dot{x}_{[\nu]j}} + \frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]j}}\right)\delta x_{[\nu]j} + \left(Q_{I_{[\nu]}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}} - \frac{\partial D_e^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}}\right)\delta q_{[\nu]} = 0, \tag{11}$$

где δ - оператор варьирования, $\delta x_{[\nu]j}$ - виртуальное перемещение подсистемы $\mathfrak{M}_1$,

$\delta q_{[\nu]}$ - виртуальное перемещение подсистемы $\mathfrak{M}_2$, $\nu \in [1,5]$.

Аналитическое представление (11) отражает принцип Даламбера-Лагранжа, т.е. виртуальная работа всех активных сил , действующих на систему $\mathfrak{M}$, и сил инерции на любых виртуальных перемещениях этой системы, совместимых со связями, равна нулю во всех ν фазах её движения.

Исследуем аддитивную группу слагаемых, входящих в виде коэффициентов в выражение для виртуальной работы $\delta A^{[\nu]}$ при соответствующих виртуальных перемещениях $\delta x_{[\nu]j}$ и $\delta q_{[\nu]}$ в левой части (11). Имеют место следующие аналитические представления:

1. *Группа* $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial \dot{q}_j}$.

$$\varPhi_M^{[\nu]} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial \dot{x}_{[\nu]}} \underset{(4)}{\overset{def}{=\!=}} -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{[\nu]}}\left(T_M^{[\nu]} + W_m^{[\nu]} - \varPi_M^{[\nu]}\right) \underset{(7)}{\overset{def}{=\!=}} -m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]}, \tag{12}$$

где $\varPhi_M^{[\nu]}$ - сила инерции, порождаемая поступательным движением элементов подсистемы $\mathfrak{M}_1$, и она характеризует меру сопротивления изменению механического состояния (покоя или движения) подсистемы $\mathfrak{M}_1$;

$$\varPhi_e^{[\nu]} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}} \underset{(4,7)}{\overset{def}{=\!=}} -\frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}}\dot{x}_{[\nu]}\, I_{[\nu]} - L\left(x_{[\nu]}\right)\dot{I}_{[\nu]}. \tag{13}$$

Аналитическое представление (13) распадается в следующую сумму:

$$\varPhi_e^{[\nu]} = \varPhi_e^{L[\nu]} + \varPhi_e^{I[\nu]}, \tag{14}$$

где

$$\varPhi_e^{L[\nu]} = -\frac{\partial L}{\partial x_{[\nu]}}\dot{x}_{[\nu]}\, I_{[\nu]}, \tag{15}$$

и эта функция характеризует ЭДС перемещения подсистемы $\mathfrak{M}_1$ при изменяющейся индуктивности L , причем эта ЭДС направлена так, чтобы вызвать сопротивление перемещению, которое её вызывает:

$$\varPhi_e^{I[\nu]} = -L\left(x_{[\nu]}\right)\dot{I}_{[\nu]}. \tag{16}$$

Эта функция характеризует ЭДС индукции в электрической цепи и возникает лишь при изменении тока $I_{[\nu]}$.

2. *Группа* $\dfrac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial q_j}$.

Функция

$$F^{[\nu]} = \frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]}} \underset{(4,7)}{\overset{def}{=\!=}} \frac{\partial}{\partial x_{[\nu]}}\left(T_M^{[\nu]} + W_m^{[\nu]} - \varPi_M^{[\nu]}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}} I_{[\nu]}^2 - m_{[\nu]}g - C_{[\nu]}x_{[\nu]} \tag{17}$$

есть проявление активных сил, действующих на подсистему $\mathfrak{M}_1$. Её можно представить в виде следующей суммы:

$$F^{[\nu]} = P_T^{[\nu]} + F_M^{\nu}, \tag{18}$$

в которой

$$P_T^{[\nu]} = \frac{\partial T^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]}} \underset{(7)}{\overset{def}{=\!=}} \frac{\partial W_m^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]}} = \frac{1}{2}\frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}} I_{[\nu]}^2 \tag{19}$$

есть электромагнитная сила, порождаемая изменением индуктивности L изолированного контура, характеризующая тяговое усилие электромагнита подсистемы $\mathfrak{M}_2$. Эта сила втягивает якорь 1 в воздушный зазор 4, якорь 1 перемещается под действием этой силы вдоль оси OX электромагнита, жёстко закрепленного на корпусе II, а координата $x_{[\nu]}$, определяющая положение подсистемы $\mathfrak{M}_1$, служит аргументом в выражении индуктивности L, т.к. магнитное поле тока электромагнита суммируется с магнитным полем намагничивающегося якоря 1;

$$F_M^{[\nu]} \underset{(7)}{\overset{def}{=\!=}} -\frac{\partial \Pi_M^{[\nu]}}{\partial x_{[\nu]}} = -\left(m_{[\nu]}g + C_{[\nu]}x_{[\nu]}\right) \tag{20}$$

есть консервативные силы, порождаемые силой веса подсистемы $\mathfrak{M}_1$ и упругими элементами 5 и 6.

Из (8) следует, что

$$F_{q_{[\nu]}} = \frac{\partial \mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial q_{[\nu]}} \underset{(4,7)}{\overset{def}{=\!=}} \frac{\partial W_m^{[\nu]}}{\partial q_{[\nu]}} \equiv 0, \tag{21}$$

т.е. электрокинетическая энергия $W_m^{[\nu]}$ от заряда $q_{[\nu]}$ не зависит в принципе.

При $\nu = 1$ во временном интервале $0 \le t < t_1$ второе слагаемое в правой части (20) обращается в ноль.

3. *Группа* $\dfrac{\partial D_e^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}}$.

Функция

$$e_R^{[\nu]} = \frac{\partial D_e^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}} \underset{(7)}{\overset{def}{=\!=}} -RI_{[\nu]} \tag{22}$$

есть ЭДС, отвечающая за напряжение на активном сопротивлении R, и характеризует падение напряжения на активном участке цепи подсистемы $\mathfrak{M}_2$, а именно:

$$u_R^{[\nu]} = RI_{[\nu]} . \tag{23}$$

4. *Группа* $Q_{I_{[\nu]}}$.

Мощность, подводимая к электрической цепи подсистемы $\mathfrak{M}_2$, создается сторонними источниками энергии с ЭДС e и при этом возникает в цепи электрический ток I. Отсюда следует, что виртуальная работа

$$\delta A^{[\nu]} = e_{[\nu]}\delta q_{[\nu]} \tag{24}$$

и виртуальное перемещение $\delta q_{[\nu]}$ эквивалентно бесконечно малому дробному изменению заряда $q_{[\nu]}$, а роль обобщенной силы $Q_{I_{[\nu]}}$ в (24) играет ЭДС e внешнего источника энергии, т.е.

$$Q_{I_{[\nu]}} = e_{[\nu]} . \tag{25}$$

5. *Группа перекрестных связей*

Из анализа приведенных выше групп следует существование подгруппы перекрёстных связей, содержащихся как составляющие в функциях $\Phi_e^{L_{[\nu]}}$ и $P_T^{[\nu]}$, определяемых формулами (15) и (19), в которые обобщенные скорости $\dot{x}_{[\nu]}$ и $I_{[\nu]}$ входят как произведения. Анализ структуры сил в классифицирующих группах $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial\dot{q}_j}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}^{[\nu]}}{\partial q_j}$ указывают на то, что наследственные признаки дополнительного взаимодействия подсистем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ проявляются посредством этих функций. Эти взаимодействия носят нелинейный характер кинематического типа в виде произведения обобщённых скоростей $\dot{x}_{[\nu]}$ и $I_{[\nu]}$. Эти кинематические нелинейности можно рассматривать как проявление перекрёстных связей в двух или трехканальной системе $\mathfrak{M}$.

На основании (15) и (19) имеем:

$$\frac{\partial\Phi_e^{L_{[\nu]}}}{\partial\dot{x}_{[\nu]}} = -\frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}} I_{[\nu]}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial P_T^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}} = \frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}} I_{[\nu]}. \tag{27}$$

Из последних двух аналитических представлений следует, что через обобщённые скорости $\dot{x}_{[\nu]}$ и $I_{[\nu]}$ осуществляется антисимметрическая взаимность электромеханического взаимодействия в магнитном поле в каждой из ν фаз движения системы $\mathfrak{M}$, а именно:

$$\frac{\partial P_T^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}} = -\frac{\partial\Phi_e^{L_{[\nu]}}}{\partial\dot{x}_{[\nu]}}. \tag{28}$$

Тогда на основании (26) - (28), можно ввести функцию μ как меру электромеханического взаимодействия в магнитном поле, т.е.

$$\mu^{[\nu]} = \left|\frac{\partial P_T^{[\nu]}}{\partial I_{[\nu]}}\right| = \left|\frac{\partial\Phi_e^{L_{[\nu]}}}{\partial\dot{x}_{[\nu]}}\right| = \left|\frac{\partial L\left(x_{[\nu]}\right)}{\partial x_{[\nu]}}\right| I_{[\nu]}. \tag{29}$$

Эта мера может служить рабочим алгоритмом при конструировании изделия и выбора параметров управления системой.

В заключение приведенных выше исследований и вычислений уравнения Лагранжа II рода (10) в форме Лагранжа– Максвелла представимы в следующем виде:

$$\begin{gathered} m^{[\nu]}\ddot{x}_{[\nu]j} + C_{[\nu]j}x_{[\nu]j} = \frac{1}{2}\frac{\partial L\left(x_{[\nu]j}\right)}{\partial x_{[\nu]j}} I_{[\nu]}^2 - m^{[\nu]}g, \\ L\left(x_{[\nu]j}\right)\dot{I}_{[\nu]} + RI_{[\nu]} = e_{[\nu]} - \frac{\partial L\left(x_{[\nu]j}\right)}{\partial x_{[\nu]j}} I_{[\nu]}\dot{x}_{[\nu]j}, \quad j = 1,2, \quad \nu = [1,5]. \end{gathered} \tag{30}$$

Литература

1. Щербина Е.С., Мельников М.А. Аналитический синтез обобщённой математической модели движения электромагнитного клапана газовых горелочных блоков в энергетике// Енергетика: економіка, технології, екологія.- 2007.- № 1, С. 3-10.