УДК 539.3

И.В.КАЗАЧКОВ, Е.И.КАЗАЧКОВА

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА

1 Актуальность проблемы

Известные многообразные методы численного решения нестационарных уравнений гидродинамики и тепломассообмена [1,3,5,6,8] и, в более общем случае, – нестационарных уравнений в частных производных [1-14] – достаточно хорошо развиты, с учетом специфических особенностей разных типов уравнений и краевых условий, при которых они решаются, и являются эффективным математическим инструментом современных прикладных исследований задач физики, химии, тепло- и массопереноса и т.д.. Однако все они требуют довольно трудоемких вычислений и для ряда современных задач многомерной математической физики все еще представляют трудности математического или вычислительного характера, связанные с преодолением неустойчивости численных схем, необходимостью повышения точности вычислений, слишком большой длительностью вычислений или требуемыми огромными затратами машинной памяти, сложностью сопряжения решений в разных областях с различными типами уравнений в частных производных или смешанных уравнений, и т.п. и т.д.

При этом нередко даже мощные современные ЭВМ не справляются с поставленными задачами. Так, расчет погоды - все еще слишком трудоемкая задача, решение которой в условиях постоянно изменяющихся граничных условий невозможно за то короткое время, в течение которого граничные условия существенно изменяются, так что дальнейшее решение краевой задачи с прежними граничными условиями уже не соответствует действительности. Тем самым решение является неточным в лучшем случае, а зачастую просто некорректным. Все типы уравнений в частных производных имеют свои специфические особенности и поэтому для каждого типа наилучшим образом подходят свои специфические методы решения [1, 2, 7, 8, 13, 14]. Общим является то, что всегда численное решение нестационарных уравнений математической физики предполагает аппроксимацию производных искомых функций по времени (конечно-разностными или конечно-элементными методами, явными, неявными схемами и т.д.) с последующим решением получаемых приближенных уравнений.

В данной работе предлагается общий метод численного решения нестационарных уравнений теплопроводности, пригодный для любых уравнений в частных производных первого порядка по времени и любого порядка по пространственным переменным. И на одном примере одномерного уравнения теплопроводности показывается его применение для решения краевых задач, а также демонстрируется его высокая эффективность.

2 Идея метода

Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности общего вида можно представить так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x, t). \quad (1)$$

С краевыми условиями вида

$$t = 0, \qquad T = T_0(x), \quad (2)$$

$$x \in \Gamma, \quad T(x) \text{ или } \frac{\partial T}{\partial x} \text{ заданы} \tag{3}$$

в зависимости от поставленного граничного условия (первого, второго или третьего рода, а также четвертого - в случае сопряженной краевой задачи). Здесь Γ - граница области ($x \in \Omega$), в которой решается краевая задача, индексом ноль обозначены функции в начальный момент времени. Предполагается, что справедливы следующие очевидные равенства: $(\partial T/\partial x)_0 = \partial T_0/\partial x$, $(\partial^2 T/\partial x^2)_0 = \partial^2 T_0/\partial x^2$. Правая часть уравнения (1) в начальный момент времени обозначается как $f = f_0 = f(x,0) = f(T_0,(\frac{\partial T}{\partial x})_0,(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})_0,x,0)$.

Если $T_0(x)$ известно во всей области $x \in \Omega$, то известны (вычислимы) все производные (в случае функции многих переменных – то же самое) – аналитически или численно. Что значит решить численно уравнение (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3)? Это значит - найти приближенное решение исходной краевой задачи, которое сколь угодно близко стремится к точному решению при увеличении точности вычислений (соответственно, затрат машинного времени и ресурсов). В известных численных методах решения уравнения (1) существенной особенностью является дискретизация пространственных и временных производных с последующим решением конечно-разностных или других разностных уравнений. Здесь предлагается сохранить дискретизацию по пространству, а по времени использовать ряды Тейлора для восстановления функции по ее производным по времени.

Для реализации предлагаемого метода из уравнения (1) вычисляются производные по времени от искомой функции и затем по ним находится аппроксимация искомого решения в виде:

$$T = T_0(x) + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_0 (\Delta t)^3 + O((\Delta t)^4). \tag{4}$$

где

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0 = f_0, \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial t} = f, \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right). \tag{5}$$

Все выражения в (5) можно найти, используя исходное уравнение (1). И далее, подставив в (4) найденные производные по времени до требуемого порядка, нетрудно получить восстановленную из ряда Тейлора искомую функцию до требуемого порядка по t.

3 Пример применения метода

Рассмотрим решение следующей краевой задачи о распространении тепла в одномерном течении со скоростью u

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \tag{6}$$

с краевыми условиями вида

$$t = 0, \quad T = T_0(x); \qquad x \in \Gamma, \quad T = T_\Gamma(t). \tag{7}$$

Перепишем (6) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x), \tag{8}$$

откуда далее из дифференцирования последнего уравнения по времени получается

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-u\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

или

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} - u\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{9}$$

Тогда с точностью до членов 2-го порядка по Δt из ряда Тейлора (4) будем иметь аппроксимацию решения уравнения (1) в виде

$$T = T_0(x) + f_0\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} - u\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3)\,, \qquad (10)$$

где T_0 - заданная в начальных условиях (7) функция, а функция

$$f_0(x) = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 - u_0\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} - u_0\frac{\partial T_0}{\partial x} - \qquad (11)$$

легко вычисляется по известным функциям $T_0(x)$, $u_0(x)$. Аналогично, далее следует:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} - u\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\frac{\partial T_0}{\partial x} - u_0\frac{\partial f_0}{\partial x}\,. \qquad (12)$$

Подставив теперь (11), (12) в (10), получим

$$T = T_0(x) + f_0\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} - u\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3)\,. \qquad (13)$$

И так далее. Здесь решение гидродинамической задачи не рассматривается, полагается, что $u(x,t)$ - известная функция, в частности, например, для стационарного течения $u(x,t) = u(x)$ ($\partial u/\partial t = 0$). Очевидно, что переход от любого n–го слоя по времени к (n+1)-му слою будет аналогичным (10), (13):

$$T_{n+1} = T_n(x) + f_n\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} - u\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3)\,, \qquad (14)$$

где n=0, 1, 2,…, N.

Обратим внимание на то, что в правой части уравнений всегда стоит функция координат пространства в текущий момент времени, к которому относится уравнение. Поэтому речь не идет ни о каких других моментах времени (то есть никаких явных, неявных и т.п. аппроксимаций по времени, никаких приближенных уравнений по времени не нужно). Если посмотреть на выражение (13), то для уравнения (6) аппроксимация второго порядка по времени требует знать (вычислить) все производные от искомой функции по пространству вплоть до 4-го порядка. Добавление следующего члена разложения по t требует добавления соответствующего члена, дифференцированного по x (еще на 2 порядка выше).

Таким образом, в реальной ситуации для сложного уравнения вычисление производных високих порядков $\partial^i f/\partial t^i$ может быть затруднительно аналитически, но это просто сделать численно. Вместо решения разностных (или иных аппроксимирующих) уравнений здесь предлагается вычисление производных по пространству с заданной точностью и нахождение функции – решения искомого уравнения на основе ряда Тейлора.

Например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\,; \qquad t = 0, \qquad u = u_0(x) = x\,; \qquad x=0, \quad u = u(t) = t\,. \qquad (15)$$

Аналитическое решение краевой задачи (15) имеет вид $u = f(x+t)$ - волна, движущая со скоростью 1 против оси x. Найдем предлагаемым методом решение данной задачи –

$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \Delta t + O((\Delta t)^2)$, откуда с учетом вышеизложенного получается $u = x + \Delta t$.

В данном случае решение не меняется при удержании членов более высокого порядка по времени, поскольку производные выше первого порядка равны нулю, то есть решение в первом приближении полностью совпадает с точным аналитическим решением задачи.

После проведенной выше иллюстрации метода на простых примерах далее рассмотрен алгоритм его применения для решения краевой задачи о трехмерном нестационарном неизотермическом течении вязкой несжимаемой жидкости.

4 Решение уравнений Навье-Стокса предлагаемым методом.

Построим численную схему для решения системы уравнений Навье-Стокса, описывающей трехмерное течение вязкой несжимаемой жидкости:

$$div\,\vec{v}=0, \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\nabla\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\upsilon\Delta\vec{v}+\vec{f},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{v}\nabla T=\frac{1}{\rho c}div\left(\lambda\nabla T\right)+\Phi, \tag{16}$$

где $\vec{v}=\left\{v_x,v_y,v_z\right\}$, $\vec{f}=\left\{f_x,f_y,f_z\right\}$ - векторы скорости и плотности массовых сил в декартовых координатах *x,y,z*, а ρ,μ,λ - соответственно плотность, коэффициент динамической вязкости и коэффициент теплопроводности жидкости, υ и c – коэффициент кинематической вязкости и удельная теплоемкость жидкости, ∇,Δ - градиент и оператор Лапласа, Φ- диссипативная функция,

$$\Phi=\frac{\mu}{\rho c}\left(2\left|\nabla\vec{v}\right|^2+\left|\frac{\tau}{\mu}\right|^2\right), \qquad \left|\frac{\tau}{\mu}\right|^2=\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2.$$

Систему уравнений в частных производных (16) необходимо дополнить начальными условиями:

$$t=0, \quad \vec{v}=\vec{v}_0(x,y,z), \quad p=p_0(x,y,z), \quad T=T_0(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\Omega \tag{17}$$

и соответствующими граничными условиями (первого, второго или третьего рода) на границе области $(x,y,z)\in\Gamma$. Не будем пока уточнять граничные условия, поскольку это не влияет на применение предложенного метода, который пригоден при любых граничных условиях. Чтобы применить вышеописанный метод решения уравнений Навье-Стокса (16) с начальными условиями (17), необходимо переписать систему (16) в следующем виде:

$$div\,\vec{v}=0, \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{F}(\vec{v},\nabla\vec{v},\vec{f})-\frac{1}{\rho}\nabla p, \qquad \frac{\partial T}{\partial t}=F_T(\vec{v},T,\nabla T,\nabla\vec{v}), \tag{18}$$

где $$\vec{F}(\vec{v},\nabla\vec{v},\vec{f})=\upsilon\Delta\vec{v}-\vec{v}\nabla\vec{v}+\vec{f}, \quad F_T(\vec{v},T,\nabla T,\nabla\vec{v})=\Phi+\frac{1}{\rho c}div\left(\lambda\nabla T\right)-\vec{v}\nabla T, \tag{19}$$

$\vec{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$ - вектор правых частей уравнения моментов без градиента давления.

Очевидно, что в начальный момент времени все правые части уравнений (19) известны из выражений (17), поэтому производные вектора скорости и температуры по времени можно вичислить на основании уравнения (18), что позволяет найти выражения скорости и температуры на следующем шаге по времени из разложения Тейлора вида:

$$\vec{v}=\vec{v}_0(x)+\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_0\Delta t+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}\right)_0(\Delta t)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\vec{v}}{\partial t^3}\right)_0(\Delta t)^3+O((\Delta t)^4),$$

$$T=T_0(x)+\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0\Delta t+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0(\Delta t)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_0(\Delta t)^3+O((\Delta t)^4) \tag{20}$$

в заданном приближении по Δt (здесь записано с точностью до членов третьего порядка). Причем, давление пока не определено на этом первом шаге по времени. И уравнение неразрывности не использовалось. Примечательно, что оно в первом приближении не влияет на поле скоростей и температуры.

Такая схема в первом приближении по времени (в (20) удерживаются только члены до Δt) в точности совпадает с решением по явной конечно-разностной схеме первого порядка точности по времени. Но далее различие этих двух методов численного решения уравнений Навье-Стокса становится принципиальным. Так, известные схемы второго порядка точности по времени являются очень громоздкими и трудоемкими, тогда как в предлагаемом методе решение второго порядка по времени получается так же просто, как и решение первого порядка. Более того, аналогичным путем оно получается так же просто и в любом более высоком приближении. Необходимо только вычислять по приведенным формулам пространственные производные согласно уравнениям (18), (19) и подставлять их в разложение Тейлора (20).

Во втором приближении по времени необходимо вычислять производные от давления, поскольку система уравнений в частных производных (16) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{v})=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla p, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)=\frac{\partial F_T}{\partial t}, \tag{21}$$

где

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}=\upsilon\Delta\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)+\frac{\partial\vec{f}}{\partial t}-\left(\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)\nabla\vec{v}+\vec{v}\nabla\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)\right),$$

$$\frac{\partial F_T}{\partial t}=\Phi_1+\frac{1}{\rho c}div\left(\lambda\nabla\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right)-\vec{v}\nabla\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)-\nabla T\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right).$$

Здесь $\Phi_1=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho c}\left(2\left|\nabla\vec{F}\right|^2+\left|\frac{\tau_1}{\mu}\right|^2\right)$,

$$\left|\frac{\tau_1}{\mu}\right|^2=\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}+\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}+\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_y}{\partial z}+\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)^2.$$

Отсюда получается

$$\vec{F}_1=\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}=\upsilon\Delta\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\frac{\partial\vec{f}}{\partial t}-\left(\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\nabla\vec{v}+\vec{v}\left(\nabla\vec{F}-\frac{1}{\rho}\Delta p\right)\right),$$

$$F_T^1=\frac{\partial F_T}{\partial t}=\Phi_1+\frac{1}{\rho c}div(\lambda\nabla F_T)-\left(\vec{v}\nabla F_T+\nabla T\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\right), \tag{22}$$

после чего, преобразуя первое уравнение системы (21) к виду $div\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=0$, подставляя в него все компоненты $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ из уравнений (18), получим

$$div\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=div\vec{F}-\frac{1}{\rho}div(\nabla p)=0,$$

откуда

$$\Delta p=\rho div\vec{F}. \tag{23}$$

Полученное уравнение Пуассона (23) позволяет найти распределение давления в области по известным значениям вектора $\vec{F}$, рассчитанным по уравнению (19) на основе первого приближения поля скоростей, вычисленного вышеуказанным методом. Данное уравнение решается сравнительно просто и дальнейшая процедура не требует решения уравнений, а только лишь расчета пространственных производных функций и последующего вычисления второго приближения на основе рядов Тейлора (20). Таким образом, получена замкнутая система уравнений (21)-(23) для вычисления второго приближения по времени в решении уравнений Навье-Стокса. При этом, поскольку разностных уравнений нет, за исключением уравнения Пуассона (23) для давления, то пространственные производные можно вычислять с любой требуемой точностью, т.к. это принципиально не усложняет алгоритм решения задачи.

Далее, дифференцируя по времени уравнения в частных производных (21), с учетом выражений (22), в третьем приближении по времени (с точностью до членов $(\Delta t)^3$ в разложении (20)) решение можно представить в виде:

$$\frac{\partial^3\vec{v}}{\partial t^3}=\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla p, \qquad \frac{\partial^3 T}{\partial t^3}=\frac{\partial^2 F_T}{\partial t^2}, \tag{24}$$

где $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla p$ определяется на основе двух известных приближений по времени для давления и его производной по времени, начиная с нулевого приближения (начальные данные), которые были выше описаны. Очевидно, что по двум временным слоям производную второго порядка по времени от градиента давления можно вычислить лишь с первым порядком точности, т.к. с первым порядком вычисляется первая производная и после этого вторая производная также с первым порядком точности вычисляется как производная от первой производной. Этот вопрос требует более углубленного рассмотрения в отдельной работе. Здесь

$$\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)=\nu\Delta\left[\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla p\right]+\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2}-\left\{\left[\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla p\right]\nabla\vec{v}+\right.$$

$$+\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\nabla\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\nabla\left(\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\vec{v}\left[\nabla\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right]\Bigg\}=$$

$$=\nu\Delta\left[\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t}\right]+\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2}-\left\{\left[\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t}\right]\nabla\vec{v}+2\left(\vec{F}-\frac{\nabla p}{\rho}\right)\left(\nabla\vec{F}-\frac{\Delta p}{\rho}\right)+\right.$$

$$\left.+\vec{v}\left[\nabla\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial^2F_T}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_T}{\partial t}\right)=\Phi_2+\frac{1}{\rho c}div\left(\lambda\nabla F_T^1\right)-\left(\vec{F}_1\nabla T+2\vec{F}\nabla F_T+\vec{v}\nabla F_T^1\right),$$

где $\Phi_2=\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}=\dfrac{\mu}{\rho c}\left(2\left|\nabla\vec{F}_1\right|^2+\left|\dfrac{\tau_2}{\mu}\right|^2\right)$,

$$\left|\frac{\tau_2}{\mu}\right|^2=\left(\frac{\partial F_x^1}{\partial y}+\frac{\partial F_y^1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_x^1}{\partial z}+\frac{\partial F_z^1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_y^1}{\partial z}+\frac{\partial F_z^1}{\partial y}\right)^2.$$

$\vec{F}_1=\left(F_x^1,F_y^1,F_z^1\right)$, F_T^1 - новые правые части уравнений согласно (22).

Окончательно уравнения третьего приближения по времени (24) принимают вид:

$$\frac{\partial^3\vec{v}}{\partial t^3}=\vec{F}_2-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla p,\qquad \frac{\partial^3T}{\partial t^3}=F_T^2,$$

$$F_T^2=\Phi_2+\frac{1}{\rho c}div\left(\lambda\nabla F_T^1\right)-\left(\vec{F}_1\nabla T+2\vec{F}\nabla F_T+\vec{v}\nabla F_T^1\right),\tag{25}$$

$$\vec{F}_2=\nu\Delta\left(\vec{F}_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2}-$$

$$-\left[\left(\vec{F}_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t}\right)\nabla\vec{v}+2\left(\vec{F}-\frac{\nabla p}{\rho}\right)\left(\nabla\vec{F}-\frac{\Delta p}{\rho}\right)+\vec{v}\left(\nabla\vec{F}_1-\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right)\right].$$

Выражение $\dfrac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2}$ должно быть известно, поскольку это – вторая производная по времени от заданной внешней массовой силы. Последняя в большинстве случаев равна константе (гравитационная сила) или изменяется по заданному закону (известная электромагнитная сила в случае электропроводной среды, виброускорение и т.п.)

Таким образом, на основании уравнений (25) можно вычислить третье приближение решения по времени исходных уравнений (18), используя (20). Распределение давления в третьем приближении получается из решения уравнения Пуассона (23) после подстановки найденного поля скоростей. Очевидно, что нет никаких проблем распространить описанный метод на случай переменных физических свойств среды. Однако при повышении точности аппроксимации по времени необходимо вычислять производные по времени от давления. Возможно, это потребует удерживать в памяти предыдущие слои по времени, однако этот вопрос требует дополнительных исследований. Тем не менее, уже этот предварительный анализ показывает высокую эффективность и простоту предложенного метода для решения нестационарных неизотермических уравнений Навье-Стокса и многих других уравнений математической физики первого порядка по времени.

Выводы

Рассмотренные примеры продемонстрировали эффективность и простоту реализации предлагаемого метода численного решения нестационарных уравнений теплопроводности, пригодного также для любых уравнений в частных производных первого порядка по времени и любого порядка по пространственным переменным. Метод основан на применении рядов Тейлора по времени для вычисления искомого решения по его временным производным. Временные производные, в свою очередь, выражаются из искомого уравнения в частных производных через производные по пространству. При этом производные по времени высших порядков, используемые в разложении Тейлора, находятся дифференцированием по времени исходного дифференциального уравнения.

На примере одномерного уравнения теплопроводности продемонстрировано применение метода и показана его высокая эффективность и сравнительная простота реализации, которая обеспечивается заменой решения конечно-разностного (конечно-элементного и т.п.) уравнения в известных численных методах более простой процедурой пространственного дифференцирования и последующего вычисления ряда Тейлора. Необходима более широкая проверка метода на различных краевых задачах, после чего он может оказаться более эффективной и простой заменой многим существующим в настоящее время численным методам. Частично идея метода похожа на примененную в работах [15-17] идею параметризации, позволяющую существенно сократить затраты при численном решении многомерных краевых задач в случае большого числа моделируемых параметров задачи. Однако в нашем методе предлагается вообще заменить интегрирование уравнений в частных производных по времени их аппроксимацией рядом Тейлора по времени.

Литература

1. Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Часть I и II.- М.: Мир.- 1990.- 728 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.- М.:Наука.-1987.-600 с.
3. Жаблон К., Симон Ж.-К. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике.- М.: Наука.- 1983.- 236 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Часть I и II.- М.: Наука.- 1977.-704 с.
5. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.- М.: Наука.- 1984.- 286 с.
6. Роуч П.Дж. Вычислительная гидромеханика.- М.: Мир.- 1980.- 402 с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.: Наука.- 1983.- 616с.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.- Новосибирск: Наука.- 1967.- 195 с.
9. Briley W.R., McDonald H. Analysis and Computation of Viscous Subsonic Primary and Secondary Flows. – Williamsburg, Virginia.- 1979.- AIAA Paper 79-1453.
10. Cebeci T., Bradshaw P. Momentum transfer in boundary layers.- 1977.- New-York: McGraw-Hill.- 412p.
11. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems// J. Comput. Phys., 1967.- V.2.- P. 12–26.
12. Gosman A.D., Spalding D. B. The Prediction of Confined Three-dimensional Boundary Layers/ Salford Symposium on Internal Flows, Inst. Mech. Engrs., London.- 1971.- Paper 19.
13. MacCormack R.W. Efficient Numerical Method for Solving Time-Dependent Compressible Navier-Stokes Equations at High Reynolds Number.- 1976.- NASA TM X-73, 129.
14. Warming R.F., Beam R.M. On the Construction and Spplication of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws // SIAM AMS Proceedings.- 1978.- V.11.- P. 159–179.
15. S. Aubert, L. Smati and P. Ferrand. Numerical Analysis of Oscillating Shock-Boundary Layer Interaction. Proc. 21st Int. Symp. Shock Waves, Great Kepple Island, Australia, 1997.
16. S. Aubert, J. Tournier, M. Rochette, J. Blanche, M. N'Diaye, S. Melen, M. Till and P. Ferrand. Optimization of a Gas Mixer Using a New Parametric Flow Solver. Proceedings of the ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, UK, 2001.
17. S. Moreau, S. Aubert, G. Grondin and D. Casalino. Geometric Parametric Study of a Fan Blade Cascade Using the New Parametric Flow Solver Turb'Opty. Proc. ASME Heat Transfer/Fluid Engineering Summer Conf., FEDSM2004-56831, Charlotte, USA, 2004.