

ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 621.311

Е. С. ЩЕРВИНА, М. А. МЕЛЬНИКОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОБОБЩЁННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КЛАПАНА ГАЗОВЫХ ГОРЕЛОЧНЫХ БЛОКОВ В ЭНЕРГЕТИКЕ

В настоящей работе отражены исследования, связанные с разработкой физической и математической моделей движения электромагнитного клапана (ЭМК) газовых горелочных блоков, используемых для дозированной подачи газа в энергетике [1].

1 Цель и объект исследования

Объектом исследования является ЭМК для дозированной подачи газа. На рис.1 изображена схема устройства \mathcal{M} . В состав устройства \mathcal{M} входят: электромагнитная система I, жёстко закреплённая на неподвижном корпусе II; якорь 1, связанный конструктивно с ползуном 2, заполненным газом, поступающим под давлением от внешней магистрали; золотника 3, выполненного из магнитомягкого материала.

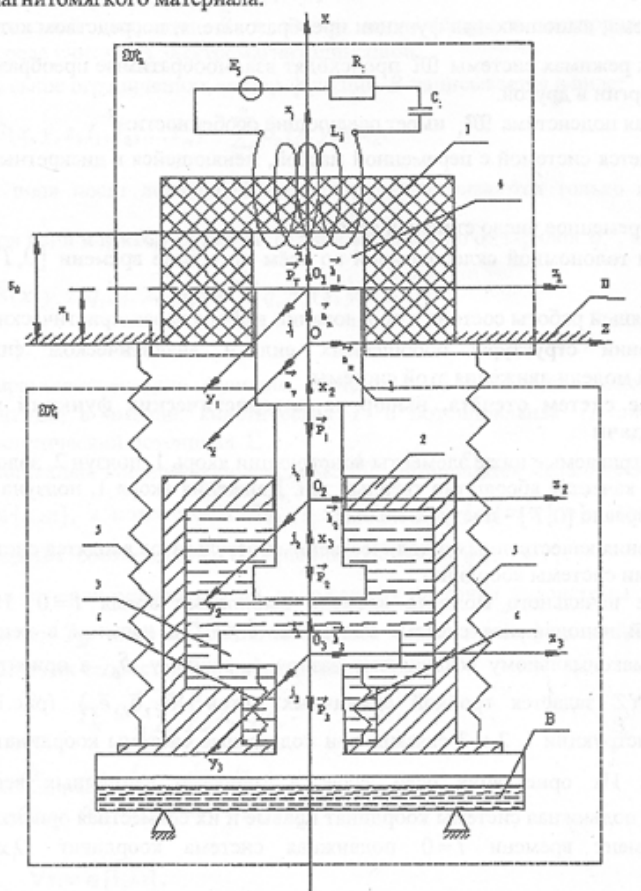


Рис. 1. Функциональная схема электромагнитного клапана

При включении электромагнита 1 якорь 1 втягивается им в воздушный зазор 4. Начальное положение якоря 1 соответствует максимальному зазору δ_0 . Якорь 1 проходит расстояние $h_1 < \delta_0$ до соприкосновения с ползуном 2 за время t_1 . При $t > t_1$ происходит совместное движение якоря 1 и ползуна 2 как одного объекта. В это же время включаются упругие элементы 5 и 6, работающие на сжатие. В момент времени $t = t_2$ упругий элемент 6 освобождается от нагрузки и золотник 3 движется относительно корпуса ползуна 2, входя в соприкосновение с якорем 1. При этом открывается пространство под золотником и давление газа в системе выравнивается. Это соответствует равенству нулю главного вектора сил давления газа как сплошной среды. Дальнейшее движение системы "якорь 1 - ползун 2 - золотник 3" - совместное. Удержание золотника 3 происходит за счёт электромагнитного взаимодействия его и якоря 1.

Из анализа системы \mathcal{M} следует, что электромагнитная энергия источника ЭДС преобразуется в механическую энергию и к механическому выходу подключается механическая нагрузка. Здесь существенным является факт взаимнообратимого преобразования энергии электромагнитного поля и механической энергии в различных динамических режимах функционирования ЭМК. Таким образом, электромеханическая система \mathcal{M} представима в следующем виде:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{M}_i, \tag{1}$$

где \mathcal{M}_1 - механическая часть ЭМК;

\mathcal{M}_2 - электромагнитная часть ЭМК;

\mathcal{M}_3 - система, выполняющая функции преобразователя, посредством которого в динамических режимах системы \mathcal{M} происходят взаимнообратимые преобразования одного вида энергии в другой.

Исследуемая подсистема \mathcal{M}_1 имеет следующие особенности:

- 1) она является системой с переменной массой, меняющейся в дискретные моменты времени $t_k, k \in [1, 4]$;
- 2) имеет переменное число степеней свободы;
- 3) является голономной склерономной во всём интервале времени $[0, T]$ её функционирования.

Цель настоящей работы состоит в обосновании выбора характеристических функций системы \mathcal{M} , определении структуры обобщённых сил и аналитическом синтезе обобщённой математической модели движения этой системы.

2 Введение систем отсчёта, выбор характеристических функций и ограничения на переменные задачи

Все рассматриваемые ниже элементы конструкции якорь 1, ползун 2, золотник 3 и корпус K принимаются в качестве абсолютно твёрдых тел. Движения якоря 1, ползуна 2 и золотника 3 во временном интервале $[0, T]$ - поступательные.

Для получения качественных и количественных результатов вводятся системы отсчёта (СО) и связанные с ними системы координат.

В качестве начального момента времени выбирается время $t = 0$. Неподвижная СО и связанная с ней неподвижная система координат $OXYZ$ с началом в неподвижной точке O соответствует максимальному воздушному зазору 4, равному δ_0 , а ориентация осей системы координат $OXYZ$ задаётся тройкой единичных ортов $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ (рис.1). С подвижными элементами конструкции 1, 2 и 3 связаны три подвижные системы координат $O_i x_i y_i z_i, i \in [1, 3]$, соответственно. Их ориентация осей задаётся тройками единичных векторов $\{\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i\}_{i=1}^3$. Неподвижная и подвижная системы координат правые и их совместная ориентация согласована. В начальный момент времени $t = 0$ подвижная система координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ совпадает с

неподвижной системой координат OXYZ. Ось OX системы координат OXYZ направлена в сторону движения золотника 3 при его отрыве от корпуса В (рис.1).

На движения точек подсистемы \mathcal{M}_1 наложены голономные склерономные связи

$$\begin{aligned} y_i &= 0, \\ z_i &= 0, \end{aligned} \quad i \in [1, 3]. \quad (2)$$

Так как формы движений элементов подсистемы \mathcal{M}_1 поступательные, то в качестве характеристической точки может быть выбрана любая произвольная точка подсистемы \mathcal{M}_1 . Пусть этой точкой будет точка O_1 якоря 1, соответствующая в момент времени $t=0$ положению статического равновесия механической части ЭМК, в котором выполняется условие:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_{g1} + \vec{P}_T = 0, \quad (3)$$

где \vec{P}_1 - сила веса якоря 1;

\vec{P}_{g1} - главный вектор сил давления газа на якорь 1;

\vec{P}_T - тяговое усилие электромагнита I.

Подсистема \mathcal{M}_2 представляет собой неразветленные электрические цепи. Каждая цепь состоит из последовательно соединенных проводников и ёмкостей. Цепи между собой электрически не связаны, но находятся в общем магнитном поле. Электромагнитное поле считается известным, то есть в каждой точке пространства R^3 в каждый момент времени t можно указать вектор магнитной индукции \vec{B} и вектор напряжённости электрического поля \vec{E} . Электромагнитная среда считается электромагнитолинейной.

При сделанных выше ограничениях вектор-функция \vec{B} записывается в виде:

$$\vec{B}(x, y, z, I_1, I_2, \dots, I_m) = \sum_{s=1}^m \vec{B}_s(x, y, z) I_s. \quad (4)$$

Электрические поля носят локальный характер, рассматриваются только в областях Ω_j ёмкостных элементов цепи и вектор-функция \vec{E} зависит линейно от зарядов q_v , а именно:

$$\vec{E}(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_r) = \sum_{v=1}^r q_v \vec{E}_v(x, y, z), \quad (5)$$

где $\dot{q}_v = I_v$, $v \in [1, r]$.

Рассмотрим характеристические функции системы \mathcal{M} . В качестве таковых выступают энергетические функции, а именно: кинетическая T и потенциальная Π энергии, функция рассеивания D и кинетический потенциал \mathcal{L} .

В качестве обобщённых координат подсистемы \mathcal{M}_1 выбираются механические обобщённые координаты q_i , $i \in [1, m]$, а подсистемы \mathcal{M}_2 - заряды q_j , $j \in [m+1, n]$. Этим обобщённым координатам системы \mathcal{M} соответствуют обобщённые скорости $\dot{q}_i, \dot{q}_j = I_j$.

Голономность и склерономность связей, наложенных на точки подсистемы \mathcal{M}_1 , позволяют кинетическую энергию T_M этой подсистемы считать однородной функцией второй степени относительно обобщённых скоростей и записать в виде:

$$T_M = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \sum_{v=1}^m A_{sv} \dot{q}_s \dot{q}_v, \quad (6)$$

$$\text{где } A_{sv} = \sum_{i=1}^m m_i \left(\frac{dx_i}{dq_s} \frac{dx_i}{dq_v} + \frac{dy_i}{dq_s} \frac{dy_i}{dq_v} + \frac{dz_i}{dq_s} \frac{dz_i}{dq_v} \right), \quad (7)$$

причём

$$A_{sv} = A_{vs} \quad \forall s, v \in [1, m], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_m), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_m), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_m). \end{aligned} \quad (9)$$

Потенциальная энергия Π_M есть функция обобщённых координат $q_i, i \in [1, m]$, то есть

$$\Pi_M = \Pi_M(q_1, q_2, \dots, q_m). \quad (10)$$

Энергия магнитного W_m и электрического W_e полей подсистемы \mathfrak{M}_2 в системе СИ представимы в виде:

$$W_m = \iiint_{\Omega_1} \frac{1}{\mu} B^2 dx dy dz, \quad (11)$$

$$W_e = \iiint_{\Omega_2} \varepsilon E^2 dx dy dz, \quad (12)$$

где μ, ε - магнитная проницаемость и диэлектрическая постоянная электромагнитной среды соответственно, Ω_1, Ω_2 - области определения магнитных и электрических полей системы \mathfrak{M} .

При выполнении условий квазистационарности на основании (4) и (5) выражения для энергий магнитного и электрического полей записываются в виде:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} I_{r+m} I_{k+m} \iiint_{\Omega_1} \vec{B}_{r+m}(x, y, z) \vec{B}_{k+m}(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} L_{r+m, k+m} I_{r+m} I_{k+m}, \quad (13)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} q_{r+m}^2 \iiint_{\Omega_2} E_{r+m}^2(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \frac{q_{r+m}^2}{C_{r+m}}, \quad (14)$$

В (13) и (14) L_{rk} есть коэффициенты самоиндукции при $r=k$ и взаимной индукции при $r \neq k$; C_r - ёмкость цепи. Отсюда следует, что L_{rk} и C_r - функции обобщённых координат $q_i, i \in [1, m]$, и от них зависят положения якоря 1, ползуна 2, золотника 3 в магнитном и электрических полях, причём $rank L_{rk} = n - m$ и есть максимальный. Из (11) - (14) следует, что функции W_m и W_e положительно-определённые квадратичные формы и

$$C_r = C_r(q_1, q_2, \dots, q_m) > 0 \quad \forall r \in [m+1, n], \quad (15)$$

$$L_{rk} = L_{kr} = L_{rk}(q_1, q_2, \dots, q_m) \quad \forall r, k \in [m+1, n]. \quad (16)$$

На основании аналитических представлений (6) и (10), (13) и (14) функции Лагранжа L_M и L_m подсистем \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 соответственно записываются в виде:

$$L_M = T_M - \Pi_M = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \sum_{v=1}^m A_{sv} \dot{q}_s \dot{q}_v - \Pi_M(q_1, q_2, \dots, q_m), \quad (17)$$

$$L_m = W_m - W_e = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} L_{r+m, k+m} I_{r+m} I_{k+m} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \frac{q_{r+m}^2}{C_{r+m}}, \quad (18)$$

Тогда обобщённый кинетический потенциал Z системы \mathfrak{M} представим как

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = L_M + L_m &\stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \sum_{v=1}^m A_{sv} \dot{q}_s \dot{q}_v + \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} L_{r+m, k+m} I_{r+m} I_{k+m} \right) - \\ &- \left(\Pi_M(q_1, q_2, \dots, q_m) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \frac{q_{r+m}^2}{C_{r+m}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Определим, как связано изменение кинетической энергии системы \mathcal{M} с характером сил, действующих на эту систему. С учётом аналитических представлений (17) - (19) кинетическая энергия T системы \mathcal{M} записывается в форме:

$$T = T_M + W_m = \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \sum_{\nu=1}^m A_{s\nu} \dot{q}_s \dot{q}_\nu + \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} L_{r+m, k+m} I_{r+m} I_{k+m} \right). \quad (20)$$

Из анализа (20) на основании зависимостей (7) - (9), (15) и (16) следует, что кинетическая энергия T есть функция обобщённых координат и скоростей, то есть:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n). \quad (21)$$

Поддействовав дифференциальным оператором $\frac{d}{dt}$ на левую и правую части (21) и проведя преобразования, получаем:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (22)$$

Из того же анализа выражения (20) заключаем, что функция T есть однородный многочлен второй степени от обобщённых координат. Тогда по теореме Эйлера об однородных функциях [2] имеем:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T, \quad (23)$$

и выражение (22) приобретает форму:

$$\frac{dT}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \dot{q}_j + 2 \frac{dT}{dt}. \quad (24)$$

Из (24) следует

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j, \quad (25)$$

где Q_j - обобщённая сила.

$$\text{Пусть } Q_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_k, \quad (26)$$

а также выполняются условия:

$$\begin{aligned} b_{jk} &= -\beta_{jk}, \\ \beta_{jk} &= \beta_{kj}. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда (26) записывается в виде:

$$Q_j = -\sum_{k=1}^n \beta_{jk} \dot{q}_k, \quad (28)$$

а мера быстроты изменения кинетической энергии (25) системы \mathcal{M} определяется как

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (29)$$

При выполнении условия

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k > 0 \quad (30)$$

функция (29) $\frac{dT}{dt} < 0$, то есть кинетическая энергия системы \mathcal{M} убывает и силы, определяемые формулой (28), носят диссипативный характер.

Пусть выполняются условия:

$$\begin{aligned}
 b_{jk} &= \gamma_{jk}, \\
 \gamma_{jk} &= -\gamma_{kj}, \\
 \gamma_{jj} &= 0 \quad \forall j, k \in [1, n].
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Тогда (26) записывается в виде:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k,
 \tag{32}$$

и выражение (25) при выполнении условий (31) принимает значение:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^n \gamma_{jj} \dot{q}_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n (\gamma_{jk} + \gamma_{kj}) \dot{q}_j \dot{q}_k = 0,
 \tag{33}$$

то есть в этом случае силы работы не совершают и носят гироскопический характер [3].

Из (25) на основании (20) имеем:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial T_M}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_M}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial W_M}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_M}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j,
 \tag{34}$$

где Q_j - обобщённые силы консервативные, диссипативные, гироскопические, определяемые (26) и (32), и неконсервативные механической природы;

Q_j^* - обобщённые силы электромагнитной природы, порождающие движения системы \mathcal{M}_1 .

Обобщённые силы (28) и (32) при выполнении условий (27) и (31) соответственно носят потенциальный характер и им соответствуют диссипативная и гироскопическая функции

$$D = D_M + D_e = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,
 \tag{35}$$

$$\Gamma = \Gamma_M + \Gamma_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k.
 \tag{36}$$

Из проведенного выше анализа следует, что в выражениях для характеристических функций L_M в (19), D и Γ в (35) и (36) подсистем \mathcal{M}_1 не входят обобщённые координаты и скорости q_j и \dot{q}_j , $j \in [m+1, n]$, характеризующие конфигурацию подсистемы \mathcal{M}_2 , но в то же время характеристические функции L_M в (19) подсистемы \mathcal{M}_2 содержат обобщённые координаты и скорости q_i и \dot{q}_i , $i \in [1, m]$, определяющие конфигурацию подсистемы \mathcal{M}_1 . Этот фактор и обуславливает связанность механических и электромагнитных процессов в системе \mathcal{M} .

Проведя перенумерацию индексов и воспользовавшись аналитическими представлениями (17) - (19) для s -той цепи подсистемы \mathcal{M}_2 , имеем:

$$E_m^s = -\dot{\Phi}_s = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L_m}{\partial I_s} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial I_s} = -\sum_{r=1}^{n-m} L_{r+m,s} \frac{dI_r}{dt} - \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^m \frac{\partial L_{r+m,s}}{\partial q_k} \dot{q}_k I_{r+m},
 \tag{37}$$

$$E_e^s = -\frac{\partial W_e}{\partial q_s} = -\frac{q_s}{C_s},
 \tag{38}$$

где Φ_s - магнитный поток через s -тый контур тока;

E_m^s - электродвижущие силы индукции;

E_e^s - разность потенциалов ёмкостных элементов s -той цепи.

Пусть R_s - сопротивление проводников s -той цепи подсистемы \mathcal{M}_2 . Тогда на основании закона Ома подсистема \mathcal{M}_2 представима в следующем виде:

$$E_s + E_m^s + E_e^s = R_s I_s, \quad (39)$$

где E_s - электродвижущая сила заданных сторонних источников напряжения.

Из сравнения правой части (39) с (35) можно утверждать, что функция

$$D_e = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-m} R_{s+m} I_{s+m}^2 \quad (40)$$

есть электрическая диссипативная функция и она отражает электрические потери из-за омического сопротивления в проводниках, причём D_e - квадратичная форма токов.

С учётом (37), (38) и (40) выражение (39) записывается в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial I_s} + \frac{\partial W_e}{\partial q_s} + \frac{\partial D_e}{\partial I_s} = E^s. \quad (41)$$

На основании проведенных построений следует, что мощность сторонних электродвижущих сил E^s затрачивается на электрические потери в омических сопротивлениях проводников, изменение энергий магнитного и электрического полей и на механическую мощность, порождаемую силами электромагнитной природы, то есть

$$N = 2D_e + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{j=1}^m Q_j^* \dot{q}_j, \quad (42)$$

где N - мощность сторонних электродвижущих сил E^s и

$$N = \sum_{k=1}^{n-m} E_{m+k}^s I_{m+k}. \quad (43)$$

На основании (13) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dW_m}{dt} &= \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial W_m}{\partial I_{m+k}} \frac{dI_{m+k}}{dt} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial W_m}{\partial I_{m+k}} I_{m+k} - \sum_{k=1}^{n-m} I_{m+k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial I_{m+k}} \right) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j. \end{aligned} \quad (44)$$

Применяя теорему Эйлера о квадратичных формах к первому слагаемому в правой части (44) и к функции D_e , определяемой (40), а также используя (42), после преобразований имеем:

$$N = 2D_e + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{k=1}^{n-m} I_{m+k} \frac{\partial W_e}{\partial q_{m+k}} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (45)$$

Третье слагаемое в правой части (45) представимо в виде:

$$\sum_{k=1}^{n-m} I_{m+k} \frac{\partial W_e}{\partial q_{m+k}} = \frac{dW_e}{dt} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (46)$$

Тогда аналитическое представление (45) на основании (46) окончательно записывается в следующей форме:

$$N = 2D_e + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j. \quad (47)$$

На основании (42) и (47) имеем:

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j} - Q_j^* \right) \dot{q}_j = 0. \quad (48)$$

Аналитическое представление (48) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j} - Q_j^* = 0, \quad \forall j \in [1, m]. \quad (49)$$

Из (49) следует

$$Q_j^* = \frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j}, \quad j \in [1, m]. \quad (50)$$

То есть выражение (50) определяет обобщённые силы электромагнитной природы, порождающие движение подсистемы \mathcal{M}_1 .

На основании (13) и (14) выражение (50) записывается окончательно в виде:

$$Q_j^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial L_{r+m, k+m}}{\partial q_j} I_{r+m} I_{k+m} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial C_{r+m}}{\partial q_j} C_{r+m}^{-2} q_{r+m}^2, \quad j \in [1, m]. \quad (51)$$

3 Математическая модель движения ЭМК

Проведенные выше аналитические построения позволяют построить замкнутую математическую модель движения ЭМК.

Из постановки задачи следует, что это модель с переменной структурой. В связи с этим выделяются пять фаз движения, каждой из которых соответствуют изменения массы подсистемы \mathcal{M}_1 в дискретные моменты времени t_v , $v \in [1, 4]$. Используя выражения для кинетического потенциала (19) и его составляющих (17) и (18), диссипативной функции D в (35), обобщённых сил механического и электромагнитного характера, определяемых из (36), (37) и (51), задачу Коши можно представить в следующей обобщённой форме уравнений Лагранжа II рода (уравнения Лагранжа-Максвелла[4]) и граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^{[v]}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}^{[v]}}{\partial q_j} + \frac{\partial D^{[v]}}{\partial \dot{q}_j} &= Q_i^{[v]}, \quad i \in [1, n], \\ t = t_{v_0} : q_i^{[v]}(t_{v_0}) &= q_{i0}^{[v]}, \\ \dot{q}_i^{[v]}(t_{v_0}) &= \dot{q}_{i0}^{[v]}, \\ t = T_{v1} : q_{ii}^{[v]}(T_{v1}) &= q_{ii}^{[v]}, \\ \dot{q}_{ii}^{[v]}(T_{v1}) &= \dot{q}_{ii}^{[v]}, \end{aligned} \quad (52)$$

где t_{v_0} - начальное время фазы $[v]$,

T_{v1} - время окончания фазы $[v]$,

$[v] \in [1, 4]$ - номер фазы движения подсистемы \mathcal{M}_1 .

Литература

1. Патент України №74865 МПК F16 K31/02 Электромагнітний клапан/Мельніков М.А./ Бюл.№2, 2006.
2. Валле-Пуссен Ш.-Ж.. Курс анализа бесконечно малых. Т.1 - Л.М.: Гостехиздат,1933. - 416с.
3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966, 300с.
4. Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Ч.3. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1948, 343с.