УДК 621.1: 533: 51-74; 536.46; 532.5; 621.762

И.В. КАЗАЧКОВ, Е.И. КАЗАЧКОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

Введение

Методы дробного интегро-дифференциального анализа [1-4] являются эффективным математическим инструментом современных прикладных исследований задач тепло- и массопереноса. Так, ранее нами была решена задача об определении теплового потока в элементе сверхпроводящего ключа [5], где очень важно было иметь аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности с целью организации оптимального управления тепловыми потоками. Монография [3] полностью сосредоточена на частном вопросе определения градиента на входе в систему в случае, когда имеется полуограниченная область с заданным на ней граничным условием первого рода. В ней рассмотрены аналитические решения многих нелинейных уравнений тепломассопереноса, что в ряде случаев крайне важно и не может быть заменено простым численным решением задачи. Однако ввиду ряда ограничений данные методы не получили столь интенсивного развития, как казалось должны были бы после появления книги. Тем не менее, этот подход открывает хорошие новые перспективы , и для решения нелинейных задач переноса и многих других, поэтому он развивался и продолжает привлекать все новых исследователей и инженеров.

Известные приложения метода строятся в основном на основе интерпретаций формального отличия дробной производной от целочисленной и предоставляемых уникальных возможностях работы с такими экзотическими объектами, как канторова лестница, возникающими в вычислительных моделях и статистических исследованиях [2].

Например, разрабатываются быстрые алгоритмы оценки центра тяжести спектра, основанные на применении дробного дифференцирования, использование которого помимо сокращения вычислительных затрат приведет к повышению точности измерения центральной частоты при "размытом" спектре, характерном для быстроманеврирующих целей и космических аппаратов. Причем, дробный интегро-дифференциальный анализ [1, 2] опирается на аппарат, который вообще не принято применять к решению классических параболических задач, но в [6] представлена новая методологическая идея, расширяющая его применение. Очевидно, что данное направление относится к числу наиболее перспективных в арсенале аналитических методов [7] решения нелинейных дифференциальных уравнений переноса и настоящий бум в его развитии еще впереди.

В данной работе на одном примере уравнения теплопроводности довольно общего вида [5], продемонстрировано применение данного метода и показана его высокая эффективность и простота.

1 Волновое уравнение теплопроводности. Постановка краевой задачи

Волновое уравнение теплопроводности, которое описывает быстропротекающие процессы, например, в элементах сверхпроводящих ключей [5], имеет следующий вид:

$$\rho\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad (1)$$

где τ - время релаксации системы;

ρ - плотность;

T - температура;

t - время;

z - пространственная координата.

При $\tau=0$ (1) - это известное простое одномерное нестационарное уравнение теплопроводности (параболический тип). Тогда как в случае с заметной релаксацией тепловых процессов это будет волновое уравнение (гиперболический тип). Здесь теплоемкость и теплопроводность являются функциями температуры [5]:

$$c(T)=A_cT^3,\qquad \lambda(T)=A_\lambda T^3. \quad (2)$$

Краевые условия (начальные и граничные) имеют вид:

- начальное условие задает температуру в начальный момент времени

$$t=0,\quad T=0; \quad (3)$$

- граничные условия первого и второго рода, соответственно, на двух концах простой однородной области (одномерной или плоской прямоугольной с равномерным профилем по одной из координат)

$$z=0,\quad T=T_0(t); \quad (4)$$

$$z=1,\quad q=-\alpha(T-T_c); \quad (5)$$

где T_c - температура окружающей среды;

α - коэффициент теплоотдачи.

Далее краевая задача (1), (3)-(5) решается с помощью метода дробного дифференцирования, позволяющего получить аналитическое решение нелинейной краевой задачи для теплового потока на границе $z=0$. Это - бесполевой метод, который не дает распределение температуры в области, только поток на границе, но аналитически и, что очень существенно, для любого вида нелинейности задачи.

2 Преобразование краевой задачи к безразмерному виду

Из дифференциального уравнения (1) и формул для зависимости физических параметров среды от температуры (2) получим:

$$\rho\tau\left(\frac{\partial c}{\partial\tau}\frac{\partial T}{\partial\tau}+c\frac{\partial^2T}{\partial t^2}\right)+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=$$

$$=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}+\lambda\frac{\partial^2T}{\partial z^2}, \quad (6)$$

или:

$$\rho\tau A_c\left[3\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial^2T}{\partial t^2}\right)\right]+\rho A_cT\frac{\partial T}{\partial t}=$$

$$=A_\lambda\left[3\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2+T\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right]. \quad (7)$$

После чего, вводя масштабные единицы температуры, длины, времени и частоты $T_e,\ h,\ \rho A_c h^2/A_\lambda$ и $A_\lambda/\left(\rho A_c h^2\right)$, можно полу-

ISSN 1813-5420

чить безразмерный аналог уравнения (7) в виде:

$$\left(1+\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}+F_0^*\left[3\left(\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}\right)^2+\left(1+\Theta\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial F_0^2}\right]=$$

$$=3\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)^2+\left(1+\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi^2},\qquad(8)$$

где $\Theta=\left(T-T_e\right)/T_e$,

ξ=z/R, $F_0=tA_\lambda/\left(\rho A_c R^2\right)$,

$F_0^*=\tau A_\lambda/\left(\rho A_c R^2\right)$ - релаксационное число Фурье.

Краевые условия:

$$F_0=0,\ \Theta=0;\qquad(9)$$

$$\xi=0,\ \Theta=\Theta_0(F_0);\qquad(10)$$

$$\xi=1,\ \frac{\partial\Theta}{\partial\xi}=-Nu\Theta.\qquad(11)$$

Деформируя ось ξ преобразованием $\zeta=\xi/(1-\xi)$, приведем краевую задачу (8)-(11) к стандартному виду:

$$\left\{F_0^*\frac{\partial^2}{F_0^2}+\left(\frac{3F_0^*}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}+1\right)\frac{\partial}{\partial F_0}-\right.$$

$$-\left(1+\Theta\right)\left(1-\xi^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\left(1-\xi^2\right)\times$$

$$\left.\times\left[3\left(1-\xi^2\right)\Theta'-\left(1+\Theta\right)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\right\}\Theta=0,\qquad(12)$$

где $\Theta'=\partial\Theta/\partial\xi$.

Граничные условия:

$$\begin{array}{ll}F_0=0,\ \Theta=0; & \xi=0,\ \Theta=\Theta_s(F_0);\\ \xi=\infty,\ \Theta=0; & \xi\in[0,\infty),\ \mathrm{F}_0\in[0,\infty),\end{array}\qquad(13)$$

после чего полученную краевую задачу (12), (13) можно решать методом дробных дифференциалов [3].

3 Решение краевой задачи методом дробных дифференциалов

Вначале необходимо произвести расщепление дифференциального оператора уравнения (12) на множители:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty}b_m(\zeta,F_0)\frac{\partial^{1-m}}{\partial F_0^{1-m}}-\beta(\zeta,F_0)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\zeta,F_0)\frac{\partial^{1-n}}{\partial F_0^{1-n}}+A(\zeta,F_0)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\Theta=0\qquad(14)$$

Здесь $\frac{\partial^{-n}f(F_0)}{\partial F_0^{-n}}=\underbrace{\int_0^{F_0}\ldots\int_0^{F_0}}_{n}f(F_0)dF_0$,

$\frac{\partial^0 f(F_0)}{\partial F_0^0}=f(F_0)$, b_m, a_n, β, A- пока неизвестные функции ζ, F_0. U_x необходимо подобрать из условия совпадения уравнения (14) с исходным уравнением (12). Для этого перемножим сначала операторы в (14):

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}b_m\frac{\partial^{1-m}}{\partial F_0^{1-m}}a_n\frac{\partial^{1-n}}{\partial F_0^{1-n}}+\sum_{m=0}^{\infty}b_m\frac{\partial^{1-m}}{\partial F_0^{1-m}}A\frac{\partial}{\partial\zeta}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\beta\frac{\partial}{\partial\zeta}a_n\frac{\partial^{1-n}}{\partial F_0^{1-n}}-\beta\frac{\partial}{\partial\zeta}A\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\Theta=0.\qquad(15)$$

Преобразуем далее (15) таким образом, чтобы операторы $\partial/\partial\zeta$ и $\partial^\nu/\partial F_0^\nu$ действовали только на Θ, для чего представим следующим образом входящие сюда члены:

$$\frac{\partial^{1-m}}{\partial F_0^{1-m}}a_n\frac{\partial^{1-n}\Theta}{\partial F_0^{1-n}}=\sum_{p=0}^{\infty}{}^{1-m}{}_p\frac{\partial^p a_n}{\partial F_0^p}\frac{\partial^{2-m-n-p}\Theta}{\partial F_0^{2-m-n-p}},$$

$$\frac{\partial^{1-m}}{\partial F_0^{1-m}}A\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}=\sum_{q=0}^{\infty}{}^{1-m}{}_p\frac{\partial^q A}{\partial F_0^q}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial^{1-m-q}\Theta}{\partial F_0^{1-m-q}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}a_n\frac{\partial^{1-n}\Theta}{\partial F_0^{1-n}}=a_n\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial^{1-n}\Theta}{\partial F_0^{1-n}}+\frac{\partial a_n}{\partial\zeta}\frac{\partial^{1-n}\Theta}{\partial F_0^{1-n}}$$

и далее будем иметь:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\binom{1-m}{p}b_m\frac{\partial^p a_n}{\partial F_0^p}\frac{\partial^{2-m-n-p}}{\partial F_0^{2-n-m-p}}-\right.$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{1-m}{q}b_m\frac{\partial^q A}{\partial F_0^q}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial^{1-m-q}}{\partial F_0^{1-m-q}}-$$

$$-B\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial^{1-n}}{\partial F_0^{1-n}}-$$

$$\left.-B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial a_n}{\partial\zeta}\frac{\partial^{1-n}}{\partial F_0^{1-n}}-B\frac{\partial A}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}-BA\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right]\Theta=0\ .(16)$$

Чтобы уравнение (16) совпало с (12), необходимо приравнять в них функции при идентичных членах. Это дает:

$$BA=1+\Theta\left(1-\zeta^2\right)^2,$$

$$Ba_1+B\frac{\partial A}{\partial\zeta}=$$

$$=1-\zeta^2\left[3\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}-2\zeta\left(1+\Theta\right)\right]+b_1A,$$

$$b_0a_0=F_0^*.$$

$$b_1a_0+b_0a_1-B\frac{\partial a_0}{\partial\zeta}=\frac{3F_0^*}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}+1,$$

$$b_0A-a_0B=0,$$

$$b_2a_0+b_1a_1+b_0a_2+b_0\binom{1}{1}\frac{\partial a_0}{\partial F_0}-B\frac{\partial a_1}{\partial F_0}=0,$$

$$-Ba_2+b_2A+\binom{1}{1}b_0\frac{\partial A}{\partial F_0}=0,$$

$$(-1)^k\frac{\Gamma(-\nu+k)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(k+1)}=\binom{\nu}{k},$$

$$\binom{1}{1}=\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-1)\Gamma(2)}=1. \quad (17)$$

Таким образом, получили уравнения (17) для вычисления коэффициентов. Далее – рекуррентные соотношения вида:

$$\sum_{m=0}^{2p+m\le 2+k}\sum_{p=0}^{\le 2+k}\binom{1-m}{2}b_m\frac{\partial^p a_{2+k-2p+m}}{\partial F_0^p}-B\frac{\partial a_{k+1}}{\partial\zeta}=0,$$

$$-Ba_{k+2}+\sum_{q=0}^{2q\le 2+k}\binom{2q-k-1}{q}b_{2+k-2q}\frac{\partial^q A}{\partial F_0^q}=0. \quad (18)$$

Выберем $a_0=1$, тогда получается $b_0=F_0^*$ и далее следует:

$$A=F_0^*B=\left|1-\zeta^2\right|\sqrt{(1+\Theta)/F_0^*}$$

$$a_1F_0^*+b_1=\frac{3F_0^*}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}+1,$$

$$a_1+\frac{\partial A}{\partial\zeta}=\frac{1-\zeta^2}{F_0^*}\left[3(1-\zeta^2)\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}-2\zeta(1+\Theta)\right]\times$$

$$\times\frac{\sqrt{F_0^*}}{\left|1-\zeta^2\right|\sqrt{1+\Theta}}+b,$$

$$a_1F_0^*+b_1=\frac{3F_0^*}{1+\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}+1,$$

$$b_2+b_1a_1+a_2F_0^*-F_0^*A\frac{\partial a_1}{dF_0}=0,$$

$$b_2A-a_2F_0^*A+F_0^*\frac{\partial A}{dF_0}=0, \quad (19)$$

откуда:

$$a_0=1,\ \ b_0=F_0^*,\ \ A=F_0^*B=\left|1-\zeta^2\right|\sqrt{(1+\Theta)/F_0^*},$$

$$a_1=\frac{1}{1+F_0^*}\left[1+\frac{3F_0^*}{1+\Theta}\Theta+\frac{5}{2}\frac{\left|1-\zeta^2\right|\Theta'}{\sqrt{F_0^*(1+\Theta)}}\right],$$

$$b_1=a_1-\frac{5}{2}\frac{\left|1-\zeta^2\right|\Theta'}{\sqrt{F_0^*(1+\Theta)}}, \quad (20)$$

после чего, рассмотрев вместо уравнения (12) уравнение, образованное правым множителем оператора (14), можно получить:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\zeta,F_0)\frac{\partial^{1-n}}{\partial F_0^{1-n}}+A(\zeta,F_0)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\Theta=0, \quad (21)$$

Из этого уравнения будем иметь при $\zeta=0$:

$$-A(0,F_0)\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(0,F_0)\frac{\partial^{1-n}\Theta}{\partial F_0^{1-n}}, \quad (22)$$

откуда с точностью до двух членов получается искомое аналитическое выражение для теплового потока на границе рассматриваемой области:

$$\tilde{q}_{st}=\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=-\frac{1}{A}\left(a_0\frac{d\Theta_s}{dF_0}+a_1\Theta_s\right)=$$

$$=\frac{1}{A}\left[\frac{\Theta_s}{\sqrt{1+\Theta_s}}+\frac{\sqrt{F_0^*}\,\Theta_s}{(1+F_0^*)\sqrt{1+\Theta_s}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{3F_0^*}{1+\Theta_s}\Theta_s\right)+\frac{5\Theta\tilde{q}_s}{2(1+F_0^*)(1+\Theta_s)^{3/2}}\right],$$

Или, после несложных преобразований:

$$\tilde{q}_{st}=\left[1+\frac{5\Theta_s}{2(1+F_0^*)(1+\Theta_s)^{3/2}}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{\Theta_s\sqrt{F_0^*}}{1+F_0^*}\left(1+\frac{3F_0^*\,\Theta_s}{1+\Theta_s}\right)+\Theta_s\right]\frac{1}{\sqrt{1+\Theta_s}}. \quad (23)$$

При $F_0^*=0$ (обычное уравнение теплопроводности, когда релаксация тепла пренебрежимо мала и не учитывается) из (23) следует:

$$\tilde{q}_{st}=-\frac{2\Theta_s(1+\Theta_s)}{2(1+\Theta_s)^{3/2}+5\Theta_s}. \quad (24)$$

Сравним формулу (24) с ранее полученной методом дробного дифференцирования. Пусть $\Theta_s=F_0$, тогда (24) и ранее полученная формулы дают соответственно:

$$q_{st}=\frac{2(1+F_0)}{2(1+F_0)^{3/2}+5F_0},$$

$$q_{s1/2}=\frac{4\sqrt{F_0}(2+F_0)}{\sqrt{\pi}(F_0-4)\sqrt{1+F_0}},$$

$$\left(\int_0^{F_0}\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{F_0-\tau}}=\frac{4}{3}F_0^{3/2}\right).$$

Выводы

Метод дробных дифференциалов является сравнительно простым, алгоритмически упорядоченным средством для аналитического решения нелинейных уравнений теплопроводности. Для его применения необходимо представить исходную краевую задачу в канонической форме, после чего остается выполнить стандартную операцию факторизации

 ISSN 1813-5420

дифференциального оператора и далее по предложенному алгоритму вычислить коэффициенты разложения. Решением задачи будет выражение для теплового потока, которое получается непосредственно из разложения, без дальнейшего решения краевой задачи. Поскольку в реальных физических ситуациях свойства сред нелинейные, то такое решение очень важно для анализа влияния нелинейных свойств сред на происходящие в них тепловые процессы. Ввиду простоты метода его можно применять на ЭВМ, привлекая символьные вычисления, что значительно повысит эффективность решения, т.к. в сложных случаях вычисления довольно громоздкие и могут занять недели и месяцы.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск: Наука и Техника.- 1987.
2. Carpinteri A., Mainardi F. (Editors). Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.- Wien and New-York: Springer-Verlag, 1997.
3. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков.-Ленинград: Химия.- 1986.
4. Dattoli G., Ricci P.E., Sacchetti D. Generalized shift operators and pseudo-polynomials of fractional order// Appl. Math. Computation.- 2003.- №141.- P. 215-224.
5. Казачков И.В. Применение методов дробного дифференцирования для исследования нелинейных тепловых процессов в элементах сверхпроводящих ключей/ Тезисы Украинской конференции «Энергосбережение и проблемы сверхпроводимости».- Яремча.- 1990.
6. Холпанов Л.П., Закиев С.Е. Метод дробного дифференцирования для решения задач тепло- и массопереноса/ 5-й Минский Международный форум по тепло- и массопереносу.- ММФ.- 2004, 24-28 мая.
7. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations.- Elsevier.- 2006.