УДК 62-505

В.Ф.КУДИН, А.В. ТОРОПОВ

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА КОНТУРА СТАБИЛИЗАЦИИ УСИЛИЯ РЕЗАНИЯ

Введение

В настоящее время широко находят применение системы стабилизации режимов резания. Такие системы просты в реализации, так как не требуют внесения значительных изменений в конструкцию станка. Одними из наиболее распространенных являются системы стабилизации усилия резания или любой из ее составляющих. Применение этих систем позволяет обеспечить заданную точность и шероховатость поверхности, а также отсутствие прижогов. Кроме того, в 2...2,5 раза уменьшается машинное время по сравнению со временем точения на обычном станке. Для электроприводов металлорежущих станков в последнее время значительно повысились требования к точности и качеству переходных процессов. Основными факторами, ухудшающими качество управления, в электроприводах постоянного тока являются нелинейности системы управления и объекта. В настоящее время перспективным направлением является разработка робастного управления, придающего системе свойства слабой чувствительности к нелинейностям, вариациям параметров объекта, внешним и внутренним возмущениям. Широкое применение для исключения вредных влияний на качество систем находят адаптивные либо оптимальные системы.

Синтез такой системы состоит в нахождении ее структуры и параметров, при которых обеспечиваются заданные технические требования. Общие требования к таким системам стабилизации рассмотрены в [1]. Расчет систем стабилизации силового параметра процесса резания рассматривался ранее в

[2] при использовании метода логарифмических характеристик. К сожалению, этот метод не давал возможности синтезировать робастный регулятор, грубый в отношении вариаций параметров объекта. В данной статье рассматривается разработка процедуры синтеза нелинейного регулятора с робастными свойствами в отношении вариации параметров процесса резания на основании метода Беллмана - Ляпунова.

1 Математическая модель системы и постановка задачи

Структурная схема контура стабилизации усилия резания представлена на рис.1.

Структурная схема получена на основании двухконтурной системы подчиненного регулирования скорости ω. Передаточная функция процесса резания представлена в форме апериодического звена первого порядка согласно [3], [4]. В этой схеме учитывается инерционность датчика силового параметра [5]. Внутренний контур регулирования тока якоря I настроен на модульный оптимум и на структурной схеме редуцирован до апериодического звена первого порядка. При этом K_T - коэффициент обратной связи по току, T_μ - постоянная времени силового управляемого преобразователя. Контур скорости настроен на модульный оптимум (коэффициент передачи регулятора скорости $K_{pc}=\dfrac{K_T J}{4T_\mu c\Phi_н K_c}$).

На схеме приняты следующие обозначения: u - управляющее воздействие; K_c - коэффициент обратной связи по скорости; M - момент на валу двигателя; $c\Phi_H$ - произведение конструктивной постоянной на номинальный поток возбуждения; J - момент инерции привода; s - подача; F_z - тангенциальная составляющая усилия резания. F_{Z3} - задание тангенциальной составляющей усилия резания.

Преобразуем структурную схему контура стабилизации к виду (рис.2).

Математическая модель на основании структурной схемы (рис.2) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-k_1x_1+k_2x_2; \\ \dot{x}_2=-a_1x_2+a_2x_3; \\ \dot{x}_3=k_3x_4; \\ \dot{x}_4=-k_4x_3-k_5x_4+bu, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1=u_{F_z}$; $x_2=F_z$; $x_3=\omega$; $x_4=I$;

$$a_1=\frac{1}{T_{рез}};\quad a_2=\frac{K_{рез}t_в}{2\pi i T_{рез}};\quad k_1=\frac{1}{T_Д};\quad k_2=\frac{K_Д}{T_Д};$$

$$k_3=\frac{c\Phi_н}{J};\quad k_4=\frac{1}{2T_\mu};\quad k_5=\frac{K_{pc}K_c}{2T_\mu K_T};$$

$$b=\frac{K_{pc}}{2T_\mu K_T}.$$

Таким образом, математическая модель контура стабилизации усилия резания сведена к системе дифференциальных уравнений с неопределенными параметрами a_1, a_2.

Представим параметры a_1, a_2 суммой их номинальных значений и отклонений (пара-

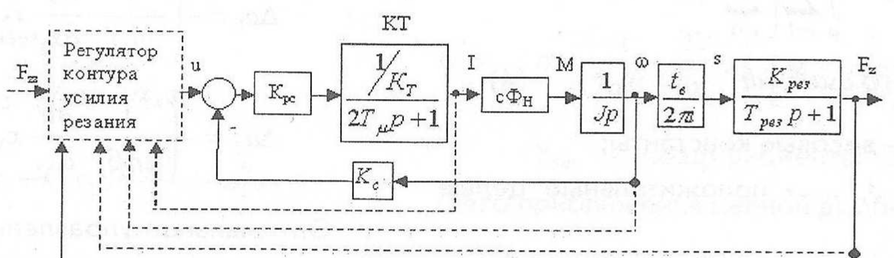


Рис.1. Структурная схема контура стабилиза-ции усилия резания

Рис.2.Структурная схема контура стабилизации усилия резания

метрических возмущений):

$$a_1 = a_1^0 + \Delta a_1,$$
$$a_2 = a_2^0 + \Delta a_2. \qquad (2)$$

Статистические характеристики отклонений параметров Δa_1, Δa_2 неизвестны. Отклонения ограничены по модулю:

$$|\Delta a_1| < \Delta\bar{a}_1, \ |\Delta a_2| < \Delta\bar{a}_2 . \qquad (3)$$

Процесс управления осуществляется на протяжении конечного отрезка времени. Уравнения математической модели привода в пространстве состояний (2.1) определены в открытой области $T(X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, u)$. Выражения для ограничений (3) определяют некоторую закрытую область, включающую вариации параметров. В этом случае предпочтительно использование минимаксного принципа оптимального управления в игровой постановке задачи синтеза. Процесс управле-ния протекает в конфликтной ситуации, обеспечивая антагонистическую дифференциальную игру. Пусть управляющий сигнал u и возмущения принадлежат двум подсистемам. Интересы подсистем противоположны с точки зрения критерия минимизации. Первая, действуя через Δa_1, Δa_2, стремится минимизировать выбранный функционал. Вторая, действуя через Δa_1, Δa_2, стремится максимизировать критерий оптимальности. Для вышеуказанной динамической системы (1) минимизируемый функционал имеет вид:

$$\min_u \max_{\Delta a_1, \Delta a_2} J = \int_0^\infty \sum_{i=1}^4 \left[\sum_{i=1}^4 \alpha_i x_i^2 + cu^2 - \right.$$
$$\left. -\beta_1 \Delta a_1^{2q} - \beta_2 \Delta a_2^{2q} \right] dt, \qquad (4)$$

где α_i, β_i, c - весовые константы;

$q = 1, 2, 3, \ldots$ - положительные целые числа;

cu^2 - положительно определенная функция, оценивающая управляющее воздействие, которое принадлежит открытой области;

$\beta_1 \Delta a_1^{2q}$, $\beta_2 \Delta a_2^{2q}$ - положительно определенные функции, оценивающие параметрические возмущения с учетом их предельных значений.

Задача состоит в нахождении оптимального управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость исследуемой системы и осуществляющего минимизацию заданного функционала, отвечающего требованиям динамической точности и минимума энергетических затрат на управление. Таким образом, задача нахождения закона управления сводится к процедуре аналитического конструирования оптимального регулятора.

2 Синтез робастного регулятора контура стабилизации усилия резания

Для математической модели контура стабилизации усилия резания (1) и выбранного критерия оптимальности (4) функциональное уравнение Айзекса-Беллмана приобретает следующий вид:

$$\min_u \max_{\Delta a_1, \Delta a_2} [\, \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 +$$
$$+ cu^2 - \beta_1 \Delta a_1^{2q} - \beta_2 \Delta a_2^{2q} + \frac{\partial V}{\partial x_1}(-k_1 x_1 +$$
$$+ k_2 x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-a_1^0 x_2 + a_2^0 x_3\right) +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial x_3} k_3 x_4 + \frac{\partial V}{\partial x_4}(-k_4 x_3 - k_5 x_4 + bu) -$$
$$\left. - \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(\Delta a_1 x_2 - \Delta a_2 x_3\right) \right] = 0. \qquad (5)$$

Предположим, что выбранный функционал имеет седловую точку по u и Δa_i. Задача состоит в нахождении управления при наихудших действиях возмущений.

Осуществим процедуру минимакса и получим систему уравнений:

$$u = -\frac{b}{2c} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_4},$$
$$\Delta a_1 = -\left(\frac{1}{2q\beta_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2 \right)^{\frac{1}{2q-1}}, \qquad (6)$$
$$\Delta a_2 = -\left(\frac{1}{2q\beta_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 \right)^{\frac{1}{2q-1}}.$$

Оптимальное управление (первый игрок), определяемое первым уравнением полученной системы (6), стремится минимизировать выбранный функционал (4). Два последних уравнения системы (второй игрок) определяют параметрические возмущения, стремящиеся максимизировать выбранный критерий оптимальности.

С учетом уравнений (6) функциональное уравнение Айзекса-Беллмана (5) примет вид:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 +$$

$$+c\left(-\frac{b}{2c}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2-$$

$$-\beta_1\left(-\left(\frac{1}{2q\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2\right)^{\frac{1}{2q-1}}\right)^{2q}-$$

$$-\beta_2\left(-\left(\frac{1}{2q\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3\right)^{\frac{1}{2q-1}}\right)^{2q}+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_1}(-k_1x_1+k_2x_2)+\frac{\partial V}{\partial x_2}(-a_1^0x_2+$$

$$a_2^0x_3)+\frac{\partial V}{\partial x_3}k_3x_4+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_4}\left(-k_4x_3-k_5x_4+b\left(-\frac{b}{2c}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)\right)-$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x_2}\left(\left(-\left(\frac{1}{2q\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2\right)^{\frac{1}{2q-1}}\right)x_2-\right.$$

$$\left.\left(-\left(\frac{1}{2q\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3\right)^{\frac{1}{2q-1}}\right)x_3\right)=0, \quad (7)$$

Преобразуем полученное выражение к более удобному для исследования виду. Перенесем в правую часть уравнения все составляющие, содержащие $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ в степени, отличной от единицы.

$$\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\alpha_3x_3^2+\alpha_4x_4^2+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_1}(-k_1x_1+k_2x_2)+\frac{\partial V}{\partial x_2}(-a_1^0x_2+$$

$$+a_2^0x_3)+\frac{\partial V}{\partial x_3}k_3x_4+\frac{\partial V}{\partial x_4}(-k_4x_3-$$

$$-k_5x_4)=\frac{b^2}{4c}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2-$$

$$-(2q-1)\beta_1\left(\frac{1}{2q\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2\right)^{\frac{2q}{2q-1}}-$$

$$-(2q-1)\beta_2\left(\frac{1}{2q\beta_2}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3\right)^{\frac{2q}{2q-1}} \quad (8)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение является модификацией уравнения Айзекса-Беллмана с мультипликативным возмущением. До этого рассматривалась лишь задача синтеза с аддитивным возмущением [6-10].

Решение задачи оптимального управления при минимизации заданного функционала (4) представляет возможность получения широкого спектра параметрических возмущений $(1\le q<\infty)$.

Дальнейшее решение нелинейного дифференциального уравнения проводится с использованием разложения членов правой части с дробной степенью в цепные дроби соответствующего приближения [11]:

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_ix_i^2+\frac{\partial V}{\partial x_1}(-k_1x_1+k_2x_2)+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_2}(-a_1^0x_2+a_2^0x_3)+\frac{\partial V}{\partial x_3}k_3x_4+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_4}(-k_4x_3-k_5x_4)=\frac{b^2}{4c}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2-$$

$$-(2q-1)\beta_1\frac{\gamma_{11}\sigma^2+\gamma_{12}\sigma^4+\gamma_{13}\sigma^6+\ldots}{1+\gamma_{21}\sigma^2+\gamma_{31}\sigma^4+\ldots}-$$

$$-(2q-1)\beta_2\frac{\gamma_{11}\upsilon^2+\gamma_{12}\upsilon^4+\gamma_{13}\upsilon^6+\ldots}{1+\gamma_{21}\upsilon^2+\gamma_{31}\upsilon^4+\ldots}, \quad (9)$$

где $\sigma=\frac{1}{2q\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2$; $\upsilon=\frac{1}{2q\beta_2}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3$;

γ_{nm} - коэффициенты соответствующего приближения цепной дроби.

Решение этого уравнения аппроксимируется последовательностью степенных форм:

$$V(x_1,\ldots,x_4)=\sum_{p=1}^{\infty}V^{2p}=V^2(x_1,\ldots,x_4)+$$

$$+V^4(x_1,\ldots,x_4)+\ldots, \quad (10)$$

где $V^2(x_1,\ldots,x_4)$ и $V^4(x_1,\ldots,x_4)$ -квадратичная и четвертичная формы соответственно.

Коэффициенты квадратичной формы

определяются из уравнений Риккати. Коэффициенты четвертичной формы и выше определяются из рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений.

Произведем решение задачи оптимального управления при минимизации заданного функционала для случая, когда возмущение имеет гармонический характер. В этом случае $q=1$ и уравнение Айзекса - Беллмана запишется:

$$\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2+\alpha_3 x_3^2+\alpha_4 x_4^2+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_1}(-k_1 x_1+k_2 x_2)+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-a_1^0 x_2+a_2^0 x_3\right)+\frac{\partial V}{\partial x_3}k_3 x_4+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_4}(-k_4 x_3-k_5 x_4)=\frac{b^2}{4c}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{4\beta_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2\right)^2-\frac{1}{4\beta_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3\right)^2. \qquad (11)$$

Система уравнений для управляющего воздействия и параметрических возмущений запишется:

$$u=-\frac{b}{2c}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_4},$$

$$\Delta a_1=-\frac{1}{2\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_2,$$

$$\Delta a_2=-\frac{1}{2\beta_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3. \qquad (12)$$

Решение $V(x)$ выберем в виде суммы квадратичной формы и усеченной четвертичной формы:

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=k_{11}x_1^2+2k_{12}x_1x_2+$$

$$+2k_{13}x_1x_3+2k_{14}x_1x_4+k_{22}x_2^2+$$

$$+2k_{23}x_2x_3+2k_{24}x_2x_4+k_{33}x_3^2+$$

$$+2k_{34}x_3x_4+k_{44}x_4^2+k_{1111}x_1^4+$$

$$+k_{2222}x_2^4+k_{3333}x_3^4+k_{4444}x_4^4+$$

$$+6k_{1122}x_1^2x_2^2+6k_{1133}x_1^2x_3^2+$$

$$+6k_{1144}x_1^2x_4^2+6k_{2233}x_2^2x_3^2+$$

$$+6k_{2244}x_2^2x_4^2+6k_{3344}x_3^2x_4^2. \qquad (13)$$

После подстановки выражения (2.13) в уравнение Айзекса-Беллмана в замкнутой форме (11) коэффициенты квадратичной формы рассчитываются из системы уравнений Риккати.

Процедуру нахождения уравнения оптимального нелинейного регулятора можно разделить на два этапа:

1. Решение системы уравнений Риккати и нахождение закона управления линейно квадратичного регулятора.

2. Решение системы линейных алгебраических уравнений и нахождение коэффициентов при нелинейных составляющих закона управления.

На первом этапе для решения системы уравнений Риккати запишем матрицы, описывающие систему:

$$A=\begin{bmatrix}-k_1 & k_2 & 0 & 0\\ 0 & -a_1^0 & a_2^0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_3\\ 0 & 0 & -k_4 & -k_5\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\b\end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad D=[0], \qquad (14)$$

где A - матрица, описывающая динамику системы;

B - матрица управляющих воздействий;

C - модуляционная матрица;

D - матрица компенсации.

Для определения весовых констант применим методику, близкую к методу масштабирования, где коэффициенты матрицы весовых констант определяются из выражений $q_i=\frac{1}{y_{i\,max}^2}$ для матрицы, определяющей динамику системы, и $r=\frac{1}{u_{max}^2}$ для матрицы, определяющей ограничения на управление. Матрицы выглядят следующим образом:

$$Q=\begin{bmatrix}q_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & q_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & q_m\end{bmatrix};\quad R=[r], \qquad (15)$$

При решении рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений получаем коэффициенты усеченной четвертичной формы следующего вида:

$$K_{1144}=\frac{1}{12}\cdot\frac{k_3 c K_{2,1}^2}{k_1\beta_2\left(k_4 c+b^2 K_{4,3}\right)};$$

$$K_{2222}=\frac{1}{4}\cdot\frac{K_{2,2}^2}{\beta_1 a_1^0};\quad K_{1122}=\frac{1}{12}\cdot\frac{K_{2,1}^2}{\beta_1\left(a_1^0+k_1\right)};$$

$$K_{1133}=\frac{1}{12}\cdot\frac{K_{2,1}^2}{k_1\beta_{21}};\quad K_{4444}=0;$$

$$K_{3344}=\frac{1}{12}\cdot\frac{K_{4,2}^2 c}{\beta_2\left(k_5 c+b^2 K_{4,4}\right)};\quad K_{2244}=\frac{1}{6}\cdot\frac{K_{2,2}c}{b^2\beta_1};$$

$$K_{2233}=\frac{1}{12}\cdot\frac{K_{3,2}^2\beta_2+K_{2,2}^2\beta_1}{a_1^0\beta_1\beta_2};\ K_{1111}=0. \qquad (16)$$

Окончательно уравнение регулятора определяется соотношением вида нелинейного регулятора:

$$u=-\frac{b}{c}\left[K_{4,1}x_1+K_{4,2}x_2+K_{4,3}x_3+\right.$$

$$+K_{4,4}x_4-\frac{b}{c}\left[12K_{1144}x_1^2x_4+\right.$$

$$\left.+12K_{2244}x_2^2x_4+12K_{3344}x_3^2x_4\right]. \qquad (17)$$

3 Пример расчета регулятора контура стабилизации усилия резания

Синтез оптимального регулятора произведен для следующих значений параметров: суммарный момент инерции механизма $J=0{,}25\ кг\cdot м^2$; коэффициент обратной связи по току $K_T=0{,}035\,В/А$; коэффициент обратной связи по скорости $K_C=0{,}042\ В\cdot c$; произведение номинального момента на конструктивную постоянную $c\Phi_H=1{,}37\ В\cdot c$; постоянная времени преобразователя $T_\mu=0{,}01\ c$; постоянная времени датчика усилия резания $T_Д=0{,}1\ c$; коэффициент усиления датчика усилия резания $K_Д=1$; шаг ходового винта $t_в=2\ мм$; передаточное число редуктора $i=1444$.

Постоянная времени и коэффициент передачи процесса резания изменяются в зависимости от глубины резания, частоты вращения шпинделя и свойств обрабатываемого материала. Так, результаты исследований, приведенные в [5], показывают, что коэффициент передачи объекта изменяется в 60, а постоянная времени T_p в 28 раз. Поэтому синтез регулятора автоматической системы управления следует проводить с учетом этой особенности процесса резания.

Учет всех факторов, влияющих на величины параметров процесса резания крайне сложен, так как приводит к большому разбросу значений. Рассмотрим влияние частоты вращения шпинделя на коэффициент передачи процесса резания и его постоянную времени. Изменение $n_ш$ обратно пропорционально изменению K_p и T_p. При изменении глубины резания или свойств обрабатываемого материала зависимости изменения параметров процесса резания являются более сложными. Примем за стационарные значения постоянной времени и коэффициента усиления величины K_p=2390,48 и T_p=0,274 с, а их отклонения ограничим по модулю для двукратного изменения частоты вращения шпинделя [5].

Для расчета весовых констант β_1 и β_2 для параметрических возмущений принимаем, что предельными значениями Δa_1 и Δa_2 будут их стационарные значения. Тогда можно записать, что:

$$\beta_1=\frac{1}{\left(a_1^0\right)^2};\quad \beta_2=\frac{1}{\left(a_2^0\right)^2}.$$

При использовании П-регулятора в системе переходные процессы имеют вид, изображенный на рис.3.

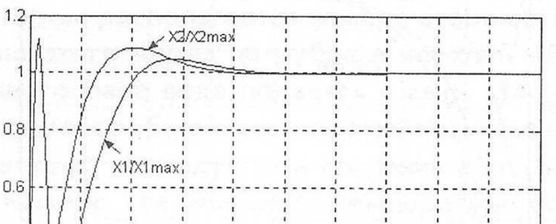
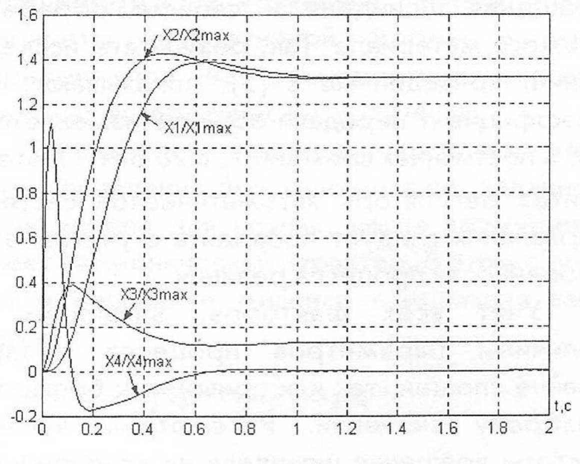
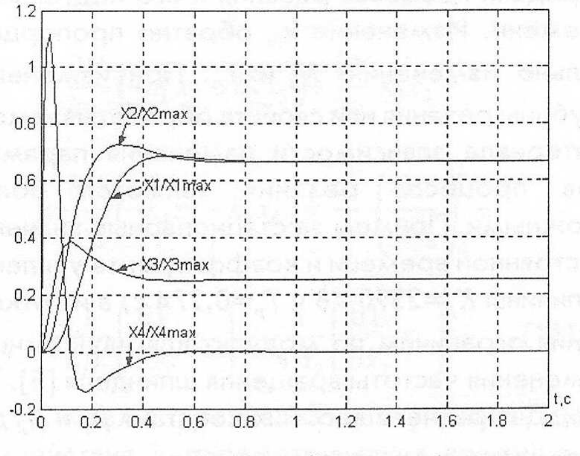


Рис.3. Переходные процессы при П-регуляторе

При изменении постоянной времени процесса резания в два раза переходные процессы принимают вид, изображенный на рис.4.



а)



б)

Рис.4. Переходные процессы при отклонении $T_{рез}$ от заданной величины

При проведении моделирования робастного регулятора, учитывающего вариации параметров, получим переходные процессы, изображенные на рис.5.

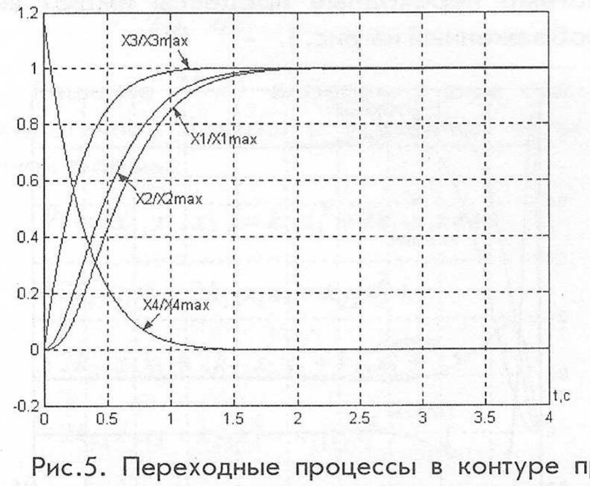


Рис.5. Переходные процессы в контуре при ступенчатом набросе задающего воздействия при использовании робастного регулятора

Выводы

Был произведен синтез робастного регулятора, обладающего свойствами малой чувствительности к вариациям параметров процесса резания. Оптимальные системы все чаще находят применение в электроприводах металлорежущих станков, так как позволяют учитывать более одной нелинейности. Получение приемлемых результатов моделирования дает возможность дальнейшего исследования систем стабилизации усилия резания и делает осуществимой возможность синтеза с учетом нескольких нелинейностей при использовании процедуры редукции. Дальнейшие исследования рекомендуется проводить с учетом внешних возмущений и нелинейностей, присущих данному контуру управления.

Литература

1. Городецкий М.С., Бейлин Л.П., Семенов А.А. Общие требования к адаптивным системам стабилизации силовых параметров процесса резания для токарных станков. - Станки и инструмент, 1974, №8.
2. Бейлин Л.П., Левин А.И. Расчет систем стабилизации силового праметра процесса резания. - Станки и инструмент, 1974, №8.
3. Абакумов А.М., Видманов Ю.И., Михелькевич В.Н. Алгоритмизация процесса продольного точения. - Станки и инструмент, 1972, №9.
4. Кудинов В.А. Динамика станков. - М: Машиностроение, 1967.
5. Шапарев Н.К. Расчет автоматизированных систем управления металлообработкой. - К.: Лыбидь,1992.
6. Симакова Э.Н. Дифференциальная игра. - Автоматика и телемеханика, 1966, №2.
7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. - М.: Мир,1967.
8. Кудин В.Ф. К вопросу о решении задачи минимакса. Труды Харьковского Высшего командно-инженерного училища, вып.301, 1969.
9. Kudin V.F., Alexandrov E.E. Syntesis of a robust suboptimal controller based on optimality minmax criteria. Proceeding II International Symposium "Structures of Systems and Control", International Federation of Automatic Control (IFAC). September 1992.Praha.
10. Блейклок П.А., Мингарн Д.Л. Робастное управление гибкими структурами, оптимальное по квадратичному критерию. - Аэрокосмическая техника, №7, 1990.
11. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. - М.: Гостехиздат, 1956.